

QED in Coulombbeichung

Hendrik van Hees

16. Februar 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Kanonische Quantisierung der QED	2
2	Die Feynmanregeln	3
3	Beispiele	8
3.1	Paarvernichtung	8
3.2	Elastische Elektronenstreuung	11

In diesem Artikel betrachten wir die störungstheoretische Quantenelektrodynamik (QED) in einer ihrer ersten Formulierungen, nämlich in der nichtkovarianten Coulombbeichung. Wir werden uns allerdings des Pfadintegralformalismusses als einer bequemen Beschreibungsweise bedienen. Die Grundlagen dazu sind in [Hee02] dargelegt. Wir bedienen uns rationalisierter Heaviside-Lorentzeinheiten mit $\hbar = c = 1$. Die Metrik ist $(g^{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, folgt also der „Westküstenkonvention“. Weiter verwenden wir die folgende Konventionen:

Das kovariante dreidimensionale Impulsintegral für Teilchen der Masse $m \geq 0$ schreiben wir in der Form

$$\int_{\mathbb{R}^3} \widetilde{d^3p} \cdots = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{p})} \cdots \quad \text{mit} \quad \omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \geq 0. \quad (1)$$

Entsprechend sind Erzeuger und Vernichter für Fermionen und Bosonen gemäß

$$\left[\mathbf{a}(\vec{p}, \sigma), \mathbf{a}^\dagger(\vec{p}', \sigma') \right]_{\pm} = (2\pi)^3 2\omega(\vec{p}) \delta_{\sigma\sigma'} \quad (2)$$

normiert wobei σ die Spin- bzw. Helizitätskomponenten der Einteilchenzustände durchnummerieren.

Wir gehen im folgenden davon aus, daß der Leser mit der kanonischen Feldquantisierung für Klein-Gordon und Dirac-Felder vertraut ist. Die Subtilitäten, die mit der Eichinvarianz der QED zusammenhängen, werden wir im folgenden einigermaßen vollständig, wenngleich kurz, zusammenfassen. Wir gehen dabei nur auf die Aspekte der störungstheoretischen Berechnung von Streuquerschnitten ein, lassen also die Problematik der gebundenen Zustände sowie die Quantenfeldtheorie (QFT) bei endlichen Temperaturen oder gar Vielteilchensysteme außerhalb des thermodynamischen Gleichgewichts außer Betracht.

Für eine Einführung in die relativistische QFT sei auf [Hee02] verwiesen.

1 Kanonische Quantisierung der QED

Die kanonische Quantisierung der QED stößt auf charakteristische Schwierigkeiten, die mit der **Eichinvarianz** der QED zusammenhängen. Wir betrachten im folgenden den einfachsten Fall der elektromagnetischen Wechselwirkung von Elektronen und Positronen. Wir bezeichnen die Elementarladung mit $e > 0$. In unseren Heaviside-Lorentzeinheiten lautet der Zusammenhang zur Feinstrukturkonstanten

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}. \quad (3)$$

Die Lagrangedichte der zu quantisierenden klassischen Feldtheorie lautet dann

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + e\bar{\psi}\not{A}\psi \quad \text{mit} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4)$$

Diese Lagrangedichte ist invariant unter der lokalen Eichtransformation

$$\psi \rightarrow \exp(ie\chi)\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \exp(-ie\chi)\bar{\psi}, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\chi. \quad (5)$$

Wir können also außer den Bewegungsgleichungen noch eine Nebenbedingung fordern, und für die Zwecke der kanonischen Quantisierung erweist sich die nichtkovariante **Coulombbeziehung**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (6)$$

als bequem. Die kanonische Quantisierung bricht ohnehin die manifeste Kovarianz, da aufgrund der Auszeichnung der Zeitvariable im (stillschweigend) zugrundegelegten inertialen Bezugssystem dasselbe (unphysikalisch!) ausgezeichnet wird. Wir werden im Verlaufe unserer Betrachtungen sehen, daß physikalisch beobachtbare Größen wie S -Matrixelemente und Streuquerschnitte allerdings invariant sind und somit tatsächlich kein „**Quantisierungsbezugssystem**“¹ ausgezeichnet wird.

Der erste Schritt zur Quantisierung ist die Berechnung der kanonischen Feldimpulse für das elektromagnetische (em.) Feld. Dazu schreiben wir zunächst die Lagrangedichte in Dreierschreibweise hin, zerlegen also die kovarianten Tensorkontraktionen in Zeit- und Raumanteile:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}A^0 + \dot{\vec{A}})^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - A_0\rho_{\text{el}} + \vec{A}\vec{j}_{\text{el}}, \quad (7)$$

wobei wir zur Abkürzung den **Elektron-Positron-Strom**

$$j_{\text{el}}^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad j_{\text{el}}^0 = \rho_{\text{el}}. \quad (8)$$

eingeführt haben.

Dies ergibt für die kanonischen Feldimpulse für das em. Feld

$$\Pi_A^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_0} = 0, \quad \vec{\Pi}_A = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{A}}}. \quad (9)$$

¹Im Unterschied dazu werden in Vielteilchensystemen lokale Inertialsysteme durch das Ruhssystem der Fluidelemente tatsächlich physikalisch ausgezeichnet (mitbewegte Bezugssysteme). Im Falle des thermodynamischen Gleichgewichtes ist dies sogar ein globales Inertialsystem, da dann alle lokalen mitbewegten Bezugssysteme identisch sind (vgl. dazu auch meinen FAQ-Artikel zur Hohlraumstrahlung [Hee07]).

Die Tatsache, daß Π_A^0 verschwindet, führt uns dazu, daß das Feld A^0 kein physikalisches Feld ist und unter Verwendung der Eichbedingung (7) mit Hilfe der Bewegungsgleichungen zu eliminieren ist. Die Bewegungsgleichung für A^0 lautet

$$S[A, \psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \mathcal{L} \Rightarrow \frac{\delta S}{\delta A^0} = -\Delta A^0 - \rho_{\text{el}} = 0. \quad (10)$$

Dies bedeutet, daß das A^0 ein **instantanes Coulombfeld** ist, was sich allerdings lediglich als Folge unserer Brechung der manifesten Kovarianz erweisen und keinen Anlaß zu Kausalitätsverletzungen geben wird. Fahren wir also mit unserem Quantisierungsverfahren fort. Wir denken uns also in (7) für A^0 überall die wohlbekannte Lösung der Poissongleichung (10)

$$A^0(t, \vec{x}) = \int d^3\vec{x}' \frac{\rho_{\text{el}}(t, \vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (11)$$

eingesetzt. Zusammen mit der Coulombgleichung (6) wird unsere Lagrangedichte nach einigen Umformungen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\vec{A}}^2 + \frac{1}{2} \vec{A} \Delta \vec{A} + \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi - \frac{1}{2} \rho_{\text{el}} A^0 + \vec{A} \vec{j}_{\text{el}}. \quad (12)$$

Dabei haben wir vollständige Dreierdivergenzen weggelassen, da diese für die Wirkung im Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung irrelevant sind. Jedenfalls ist nun (12) zusammen mit der Coulombgleichung (6) der Ausgangspunkt für die kanonische Quantisierung für die Störungstheorie.

2 Die Feynmanregeln

Dazu gehen wir ins Wechselwirkungsbild und bestimmen zunächst die freien Feldoperatoren. Dabei sind aufgrund der Coulombgleichung von den drei Feldern \vec{A} nur zwei voneinander unabhängig. Sie sind durch die Eichbedingung und die Bewegungsgleichungen bestimmt. Es ergibt sich für \vec{A} aus dem Variationsprinzip für die freie Wirkung

$$S_0[\vec{A}, \psi, \bar{\psi}] = \int d^3\vec{x} \mathcal{L}_0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \dot{\vec{A}}^2 + \frac{1}{2} \vec{A} \Delta \vec{A} + \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi \quad (13)$$

die Bewegungsgleichungen im Wechselwirkungsbild

$$\square \vec{A} = 0, \quad (i\not{\partial} - m) \psi = 0. \quad (14)$$

Das Feld \vec{A} läßt sich also nach ebenen Wellen entwickeln, wobei wegen der Coulombgleichung (6) für jeden Impuls nur die **beiden transversalen Moden** zu verwenden sind. Wir schreiben das Resultat sogleich in Operatorschreibweise hin

$$\vec{A} = \sum_{\lambda=\pm 1} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \left[\mathbf{a}(\vec{p}, \lambda) \vec{\epsilon}(\vec{p}, \lambda) \exp(-ipx) + \mathbf{a}^\dagger(\vec{p}, \lambda) \vec{\epsilon}^*(\vec{p}, \lambda) \exp(ipx) \right]_{p_0=\omega(\vec{p})}. \quad (15)$$

Dabei haben wir für die Moden **Helizitätseigenmoden** verwendet. Für $p = p\vec{e}_3$ sind die Polarisationsvektoren durch

$$\vec{\epsilon}(p\vec{e}_3, \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2) \quad (16)$$

gegeben. Für beliebige andere Richtungen des Dreierimpulses \vec{p} gehen die Polarisationsvektoren durch einfache Drehungen aus (16) hervor. Wir werden im folgenden zur Berechnung des **Photonenpropgators** allerdings nur die **Helizitätssummen**

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \vec{\epsilon}^*(\vec{p}, \lambda) \otimes \vec{\epsilon}(\vec{p}, \lambda) = \not{p} - \frac{\vec{p} \otimes \vec{p}}{p^2} \quad (17)$$

benötigen. Die **Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren** erfüllen im Sinne des kanonischen Quantisierungsformalismusses die kanonischen Vertauschungsrelationen für **Bosonen**

$$[\mathbf{a}(\vec{p}, \lambda), \mathbf{a}(\vec{p}', \lambda')] = 0, \quad [\mathbf{a}(\vec{p}, \lambda), \mathbf{a}^\dagger(\vec{p}', \lambda')] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (18)$$

Für die Störungsrechnung benötigen wir nun den **zeitgeordneten Photonpropagator**². Dieser ist definitionsgemäß durch

$$i\Delta_{jk}(x) = \langle 0 | \mathcal{T} \mathbf{A}_j(x) \mathbf{A}_k(0) | 0 \rangle \quad (19)$$

gegeben. Eine kurze Rechnung unter Verwendung von (15), (17) sowie $\mathbf{a}(\vec{p}, \lambda) | 0 \rangle = 0$ liefert schließlich unter Verwendung des üblichen Konturintegrationstricks in der p^0 -Ebene

$$D_{jk}^{(\text{trans})}(p) = \frac{1}{p^2 + i0^+} \left(\delta_{jk} - \frac{p_j p_k}{p^2} \right) \quad (20)$$

$$\Delta_{jk}(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} D_{jk}^{(\text{trans})}(p) \exp(-ipx).$$

Dies zeigt den einzigen Vorteil der kanonischen Quantisierung mit vollständiger Eichfixierung: Es propagieren von vornherein nur die physikalischen transversalen Freiheitsgrade der Photonen. Freilich erkauft man sich dies durch die Unbequemlichkeit, daß die Feynmanregeln nicht manifest kovariant sind.

Dem können wir abhelfen, indem wir die Vierergeschwindigkeit des Quantisierungsbezugssystems $(U^\mu) = (1, 0, 0, 0)^t$ einführen. Nach einigem Rechnen findet man die Darstellung

$$D_{\mu\nu}^{(\text{trans})}(p) = \frac{1}{p^2 + i0^+} \left[-g_{\mu\nu} - \frac{p^2 U_\mu U_\nu - (pU)(p_\mu U_\nu + p_\nu U_\mu) + p_\mu p_\nu}{(pU)^2 - p^2} \right]. \quad (21)$$

Der Vollständigkeit halber schreiben wir auch die Entwicklung des Diracfeldes nach ebenen Wellen an:

$$\psi(x) = \sum_{\sigma=\pm 1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \widetilde{d^3 p} [\mathbf{b}(\vec{p}, \sigma) u(\vec{p}, \sigma) \exp(-ipx) + \mathbf{c}^\dagger(\vec{p}, \sigma) v(\vec{p}, \sigma) \exp(ipx)]_{p_0=\omega(\vec{p})}. \quad (22)$$

Dabei sind \mathbf{b} (\mathbf{c}) Vernichtungsoperatoren für Elektronen (Positronen) und erfüllen die üblichen Antikommutatorrelationen für Fermionen mit der in (2) spezifizierten Normierung. Die Spinoren u und v sind so normiert, daß für die Spinsummen

$$\sum_{\sigma=\pm 1/2} u(\vec{p}, \sigma) \bar{u}(\vec{p}, \sigma) = \not{p} + m, \quad \sum_{\sigma=\pm 1/2} v(\vec{p}, \sigma) \bar{v}(\vec{p}, \sigma) = \not{p} - m \quad (23)$$

²für eine ausführliche Begründung der Störungsrechnung vgl. [Hee02]; unser Vorgehen hier ist nach der vollständigen Eichfixierung nunmehr vollkommen analog zur dort beschriebenen kanonischen Quantisierung des Klein-Gordonfeldes, nur daß wir es hier mit zwei transversalen Feldmoden statt mit nur einem Feldmodus im Falle des ungeladenen Klein-Gordonfeldes zu tun haben.

gilt.

Der zeitgeordnete Dirac-Fermionenpropagator im Impulsraum lautet

$$G(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i0^+}. \quad (24)$$

Kommen wir nun zum Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichte (12):

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{2}\rho_{\text{el}}A^0 - e\vec{A}\vec{\psi}\vec{\gamma}\psi \quad (25)$$

Betrachten wir zunächst den zweiten Term. Wir können den üblichen kovarianten QED-Dreiervertex verwenden, denn sowohl unser Propagator (21), der innere Linien von Feynmandiagrammen entsprechen, als auch die Polarisationsensoren $\epsilon(\vec{p}, \pm 1) = [0, \vec{\epsilon}(\vec{p}, \pm 1)]^t$, die äußeren Photonenlinien zugeordnet werden (also reale asymptotische Photonen in Endzustand), enthalten nur rein räumliche Komponenten.

Der erste Term in (25) lautet gemäß (8) und (11)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\rho_{\text{el}}(x)A^0(x) &= -\frac{1}{2}e^2\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) \int d^3\vec{x}' \frac{\bar{\psi}(t, \vec{x}')\gamma^0\psi(t, \vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x' \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x - x')] D_{\mu\nu}^{(\text{inst})}(p) i j_{\text{el}}^\mu(x') i j_{\text{el}}^\nu(x), \end{aligned} \quad (26)$$

wobei

$$D_{\mu\nu}^{(\text{inst})}(p) = \frac{U_\mu U_\nu}{(pU)^2 - p^2}. \quad (27)$$

Daraus ergibt sich, daß wir einen Viererfermionenvertex erhalten, der sich nach den üblichen Diagrammregeln für ein Ein-Photonenaustauschdiagramm ergibt, wobei aber als innere Linie $iD_{\mu\nu}^{(\text{inst})}$, also ein **instantaner Coulombpropagator** (27) statt eines echten Photonenpropagators einzusetzen ist. Weiter ist noch der zusätzliche Faktor 1/2 wesentlich für die korrekte Bestimmung des kombinatorischen Faktors solcher Teildiagramme im Kontext größerer Diagramme. Wir stellen die graphischen Regeln in Fig. 1 zusammen. Die hier besprochenen Feynmandiagramme, die sich aus den in Abb. 1 gezeigten Diagrammelementen zusammensetzen, symbolisieren einzelne Terme in der Störungsreihe für die **invarianten Matrixelemente** für Streuprozesse (oder Teilchenzerfälle, was aber hier in der QED nicht vorkommt, denn sowohl Photonen als auch Elektronen/Positronen sind stabile Teilchen). Der Ausdruck für ein Diagramm ergibt sich dabei nach folgenden Regeln³:

1. Es sind **alle** topologisch verschiedenen Diagramme für einen bestimmten Prozeß in einer gegebenen Ordnung in Potenzen der Kopplungskonstanten e zu zeichnen. Die einzelnen Elemente in diesen Diagrammen besitzen die in Abb. 1 gegebene Bedeutung.
2. Jedes Diagramm ist mit **kombinatorischen Faktoren** iM_{fi} zu multiplizieren, und zwar zunächst mit einem Faktor $\frac{1}{n!}$, wobei n die Anzahl der elementaren Vertices in einem Diagramm ist und einen Multinomialfaktor, der sich beim Potenzieren des Wechselwirkungshamiltonoperators in der Dyson-Wickreihe (Exponentialfunktion) ergibt. Dabei ist

³Für die ausführliche Herleitung der Feynmanregeln aus dem Formalismus der QFT vgl. wieder [Hee02].

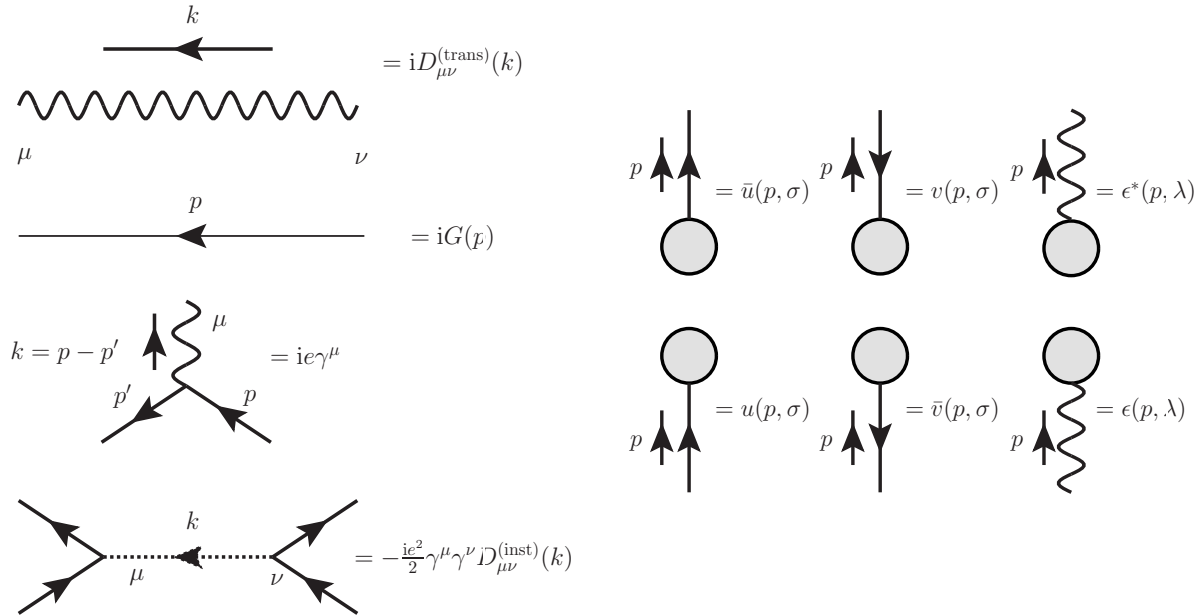


Abbildung 1: Die fundamentalen Feynmandiagrammelemente im kanonischen Formalismus in Coulombbeichung. Links sind die Propagatoren (innere Linien) und Vertices, rechts die äußeren Beinchen (Wellenfunktionen) dargestellt.

für die hier besprochene kanonische Coulombbeichung zu beachten, daß das instane Coulombbaustauschdiagramm formal von 1. Ordnung ist, obwohl es zwei Vertices enthält und von der Ordnung e^2 ist. Dann erhält jedes Diagramm noch ein kombinatorisches Gewicht entsprechend der möglichen Anzahl von Verbindungen der Vertices untereinander mit Propagatorlinien bzw. der äußeren Punkte mit Beinchen, die den Feldoperatoren entsprechen. Diese Zählung entspricht der Summation aller möglicher Kontraktionen von Operatoren in den Vakuumerwartungswerten gemäß dem Wick'schen Theorem, die alle zum gleichen Ausdruck führen, der diagrammatisch durch die Topologie des Diagramms festliegt.

- Diagramme, die sich nur durch die Vertauschung von Paaren von Fermionenlinien unterscheiden erhalten relativ unterschiedliches Vorzeichen. Dies rührt von den Permutationen der Fermionenoperatoren bei der Anwendung des Wicktheorems her, die nötig sind, um die zu kontrahierenden Operatoren in die richtige Reihenfolge und nebeneinander zu bringen, so daß die Kontraktionen jeweils Fermionenpropagatoren bzw. Wellenfunktionen ergeben.
- Aus demselben Grunde erhält das Diagramm für jede geschlossene Fermionenschleife, die nicht durch Photonenpropagatoren unterbrochen wird, ein zusätzliches $--$ -Zeichen.
- An jedem Vertex gilt Viererimpulserhaltung. Über dadurch nicht festgelegte Impulse in Schleifen ist mit $\int d^4p/(2\pi)^4$ zu integrieren. Dabei auftretende Divergenzen denken wir uns durch ein eichinvariantes Regulatorverfahren reguliert (für eine ausführliche Darstellung der hier besonders bequemen dimensional Regularisierung vgl. wieder [Hee02]).

Wir können nun bereits durch ein einfaches diagrammatisches Argument den für die Konsistenz

der Eichtheorie mit den fundamentalen Grundlagen der relativischen QFT eminent wichtigen Schluß ziehen, daß sich sämtliche Diagrammteile, die **instantanen Coulombwechselwirkungen** entsprechen, gegenseitig wegheben bzw. überhaupt nicht zu physikalisch beobachtbaren Größen wie S -Matrixelementen beitragen. Dies sieht man wie folgt ein: Statt die instantane Coulombwechselwirkung im Wechselwirkungsteil als Diagramm der ersten störungstheoretischen Ordnung zu interpretieren, kann man es auch als aus zwei gewöhnlichen Vertizes zusammengesetzt denken⁴. Dadurch wird es formal zur zweiten Ordnung der Störungstheorie. Dann ist der gesonderte Faktor $1/2$ freilich wegzulassen, und die kombinatorischen Faktoren des Diagramms genauso zu zählen wie für ein Einphotonenaustauschdiagramm, wobei allerdings der gepunktet gezeichnete Propagator, der der instantanen Coulombwechselwirkung entspricht, zu verwenden ist. Daraus folgt aber sofort, daß es für jedes Einphotonenaustauschunterdiagramm innerhalb eines gegebenen Diagramms ein gleichartiges Diagramm geben muß, das statt der Einphotonenpropagatorlinie eine instantane Coulombfeldlinie enthält, und das gilt in allen Kombinationen solcher Diagramme. Das führt nun unmittelbar zu dem gewünschten Resultat: Statt zwei Arten von em. Feldlinien (transversale Photonpropagatoren und instantane Coulombwechselwirkungen) zu verwenden, können wir auch gleich die Summe dieser beiden Diagrammelemente verwenden. Dies führt dann gemäß (21) auf den **Photonenpropagator in Coulombbeichung** im modernen Sinne, also auf

$$D_{\mu\nu}^{(\text{coul})}(p) = \frac{1}{p^2 + i0^+} \left[-g_{\mu\nu} + \frac{(pU)(p_\mu U_\nu + p_\nu U_\mu) - p_\mu p_\nu}{(pU)^2 - p^2} \right]. \quad (28)$$

Damit sind wir bereits den wichtigsten Anteil instantaner Coulombfelder im Formalismus losgeworden und können die Diagrammregeln für die elementaren Vertizes gemäß Abb. 2 vereinfachen.

Es verbleiben allerdings noch die übrigen Terme im zweiten Summanden von (28). Diese enthalten jedoch wenigstens einen Photonenimpuls p_μ bzw. p_ν . Es läßt sich zeigen, daß diese Terme aufgrund der **Stromerhaltung** weder in Verbindung mit Vertizes, die in inneren Elektronenpropagatorlinien noch in Verbindung mit äußeren Elektronen- bzw. Positronenlinien auftreten. Formal äußert sich dies zum einen in der **Ward-Takahashi-Identität** zwischen Vertizes und Elektronenpropagatoren, zum anderen in der für äußere Linien geltenden „on-shell“-Bedingung für die asymptotischen Zustände u und v , die sich in der Gültigkeit der im Impulsraum geschriebenen freien Diracgleichung für die Elektronen- bzw. Positronenfeldmoden, d.h.

$$(\not{p} - m)u(p, \sigma) = (\not{p} + m)v(p, \sigma) = 0 \quad \text{mit} \quad p^2 = m^2 \quad (29)$$

äußern. Wir werden uns weiter unten noch mit Hilfe des Pfadintegralformalismusses und funktionaler Methoden auch formal von der Korrektheit dieser Resultate überzeugen. Jedenfalls kann letztlich der Photonpropagator auch durch den manifest kovarianten, d.h. nicht von einem bestimmten Quantisierungsbezugssystem abhängigen **Propagator in Feynmanbeichung** ersetzt werden:

$$D_{\mu\nu}^{(\text{Feyn})}(p) = -\frac{g_{\mu\nu}}{p^2 + i0^+}. \quad (30)$$

Im folgenden werden wir jedoch zunächst zwei Beispiele in niedrigster Ordnung mit den „kanonischen“ Feynmanregeln der Coulombbeichung gemäß Abb. 1 durchrechnen, um uns von den obigen Argumenten exemplarisch zu überzeugen.

⁴Es ist wichtig zu bemerken, daß selbstverständlich solche Diagrammteile nicht zu berücksichtigen sind, wenn die Photonlinie extern ist, also realen Photonen entspricht. Es ist klar, daß es in jeder endlichen Ordnung der Störungsrechnung keine externen elektrostatischen Coulombfelder geben kann.

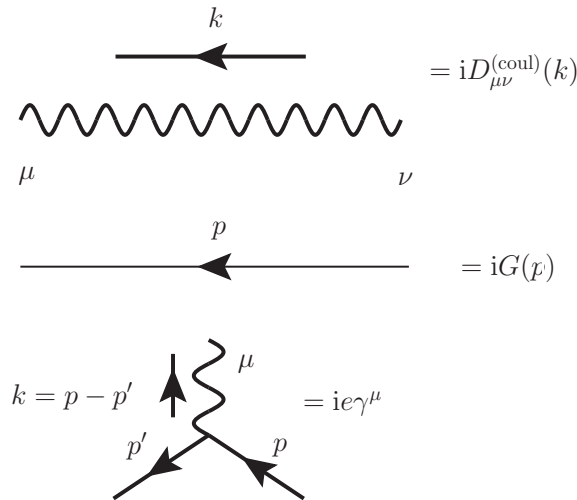


Abbildung 2: Die fundamentalen Feynmandiagrammelemente im modernen Formalismus in Coulombbeziehung. Die Bedeutung der äußeren Beinchen bleibt gegenüber dem kanonischen Formalismus ungeändert (vgl. Abb 1).

3 Beispiele

In diesem Abschnitt rechnen wir zwei Beispiele durch, nämlich als einfachsten Fall die **Paarvernichtung** eines Elektron-Positronpaares zu einem Muon-Antimuonpaar und die **elastische Elektronenstreuung (Møllerstreuung)**.

3.1 Paarvernichtung

Wir betrachten den Prozeß $e^- + e^+ \rightarrow \mu^+ \mu^-$ in niedrigster Ordnung QED-Störungstheorie. Dazu müssen wir zur Lagrangedichte 4 lediglich den Beitrag

$$\mathcal{L}_\mu = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - M + e\not{A})\Psi \quad (31)$$

addieren. Die Feynmanregeln in Abb. 1 ergänzt sich dadurch lediglich durch die Muonpropagatorlinie und einen Photon-Muon-Muon-Vertex. Hinsichtlich der instantanen Coulombwechsellwirkungsanteile ist ein Diagrammelement mit zwei Muonenströmen sowie eines mit einem Muon- und einem Elektronenstrom zu ergänzen. Die Feynmanregeln sind vollkommen analog. Nur im letztgenannten „gemischten“ instantanen Vierervertex ist der Faktor $1/2$ wegzulassen. Es ist klar, daß man auch in diesem Falle wieder die instantanen Vierervertices als Beiträge zweiter Ordnung der Störungstheorie mit einer Coulombfeldaustauschlinie uminterpretieren kann.

Mit diesen Ergänzungen können wir das invariante Matrixelement berechnen. Im kanonischen Formalismus tragen die beiden in Abb. 3 bei. Bestimmen wir zunächst die kombinatorischen Faktoren. Das linke Einphotonenaustauschdiagramm ist von zweiter Ordnung Störungstheorie und setzt sich aus zwei Vertices von verschiedenen Termen in der Lagrangedichte zusammen. Wir haben also einen Faktor $1/2!$ von der Dyson-Wick-Entwicklung der Exponentialfunktion und einen Faktor vom Quadrieren des Binoms $\binom{2}{1} = 2$. Nun müssen wir noch überlegen, auf

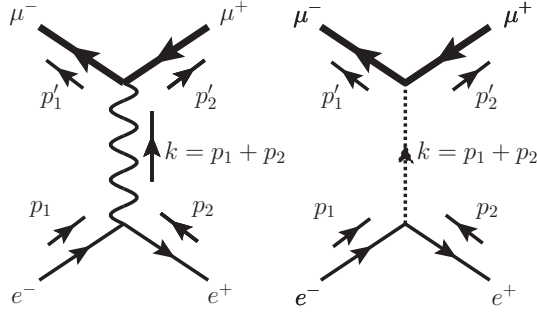


Abbildung 3: Die Diagramme zur Elektron-Positron-Paarvernichtung zu Muonen im kanonischen Formalismus.

wieviele Arten wir dieses Diagramm durch Verbinden der entsprechenden Linien aus den elementaren Diagrammteilen erhalten kann. Offenbar ist dies nur auf eine Art möglich, denn wir können lediglich auf eine Art die einlaufende Antimuonlinie (entsprechend einem auslaufenden Antimuon) mit der dazugehörigen Wellenfunktion $V(p'_2, \sigma'_2)$ verbinden usw. Wir erhalten also insgesamt einen kombinatorischen Gewichtungsfaktor von 1.

Das rechts abgebildete Coulombfeldaustauschdiagramm ist formal von erster Ordnung und besitzt wie oben erläutert einen fundamentalen Faktor 1. Die äußeren Felder lassen sich wieder nur auf eine Weise mit den Beinchen des Vierervertexes verbinden. Auch dieses Diagramm besitzt also einen kombinatorischen Gewichtungsfaktor 1, wie es auch aufgrund unserer obigen Überlegungen sein muß. In der Tat hebt sich der Coulombfeldanteil gegen den entsprechenden Beitrag im transversalen Propagator (21) weg. Wir können also tatsächlich zum korrekten Ausdruck gelangen, indem wir die Coulombbeichungsfeynmanregeln gemäß Abb. 2 verwenden, die freilich ebenfalls durch die entsprechenden Diagrammelemente für die Muonen zu ergänzen sind.

Wir haben also nun folgendes Zwischenresultat:

$$i\mathcal{M}_{fi} = -ie^2 \bar{U}_1 \gamma^\mu V_2 D_{\mu\nu}^{(\text{coul})}(k) \bar{v}_2 \gamma^\nu u_1 \quad (32)$$

mit dem von reinen Coulombbaustauschtermen freien Propagator (28). Dabei stehen groß (klein) geschriebene Diracspinoren für Muonen und Antimuonen (Elektronen und Positronen) und die Notation wie u_1 steht als Abkürzung für $u(p_1, \sigma_1)$ usw.

Als nächstes versichern wir uns, daß die Terme mit den k und U im Zähler des Propagators (28) ebenfalls wegfallen, wie es die Lorentzinvarianz des Matrixelements verlangt. Dazu genügt die folgende Betrachtung am Elektronen-Positronenvertex:

$$k_\nu \bar{v}_2 \gamma^\nu u_1 = \bar{v}_2 \not{k}_1 u_1 + \bar{v}_2 \not{k}_2 u_1. \quad (33)$$

Verwenden wir nun die Gleichungen (29) sowie die entsprechenden Dirac-adjungierten Gleichungen

$$\bar{u}(p, \sigma)(\not{p} - m) = \bar{v}(p, \sigma)(\not{p} + m), \quad (34)$$

können wir im linken Term von (33) statt $\not{k}_1 \rightarrow m$ schreiben (Anwendung der Diracmatrix auf u_1), im rechten statt $\not{k}_2 \rightarrow -m$ (Anwendung der Diracmatrix nach links auf \bar{v}_2) schreiben. Folglich ist also

$$k_\nu \bar{v}_2 \gamma^\nu u_1 = \bar{v}_2 \not{k} u_1 = 0. \quad (35)$$

Analog folgt das gleiche für die Überschiebung des Muon-Antimuonstroms mit k^μ . Dies ist direkte Folge der Erhaltung des elektromagnetischen Stromes und notwendige Bedingung für die Eichinvarianz der Theorie.

Es fallen also alle Terme außer dem dem Feynmanpropagator (30) als Photonenlinie entsprechenden Ausdruck weg. Wir erhalten also in der Tat das invariante Matrixelement

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{e^2 g_{\mu\nu}}{s} \bar{U}_{1'} \gamma^\mu V_{2'} \bar{v}_2 \gamma^\nu u_1. \quad (36)$$

Dabei haben wir die **Mandelstamvariable** $s = k^2 = (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2$ eingeführt⁵.

Wir rechnen der Vollständigkeit halber noch den Wirkungsquerschnitt für den unpolarisierten Prozeß aus (d.h. wir schießen unpolarisierte Elektronen und Positronen aufeinander und beobachten die Polarisation der produzierten Muon-Antimuonpaare nicht). Dazu brauchen wir das gemittelte Matrixelement

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (37)$$

Dabei haben wir über die Spins von Elektron und Positron im Anfangszustand gemittelt (Faktor 1/4) und über diejenigen im Endzustand summiert. Mit Hilfe der Spinsummen (23) erhalten wir

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} = \frac{e^4 g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'}}{s^2} \text{Tr} \left[(\not{p}'_1 + M) \gamma^\mu (\not{p}'_2 - M) \gamma^\nu \right] \text{Tr} \left[(\not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}_2 - m) \gamma^\mu \right]. \quad (38)$$

Die Dirac-Spuren lassen sich ohne Probleme (auch mit Hilfe von Computeralgebrasystemen, z.B. unter Verwendung des **Tracer**-Pakets in **Mathematica**) auswerten. Das Resultat ist

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} = 8e^4 \frac{(p_1 p'_2)(p'_1 p_2) + (p_1 p'_1)(p_2 p'_2) + M^2(p_1 p_2) + m^2(p'_1 p'_2) + 2m^2 M^2}{s^2}. \quad (39)$$

Eliminieren wir die Viererimpulsprodukte zugunsten der Mandelstamvariablen

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = 2m^2 + 2p_1 p_2 = 2M^2 + 2p'_1 p'_2, \\ t &= (p_1 - p'_1)^2 = m^2 + M^2 + 2p_1 p'_1 = m^2 + M^2 + 2p_2 p'_2, \\ u &= (p_1 - p'_2)^2 = m^2 + M^2 + 2p_1 p'_2 = m^2 + M^2 + 2p_2 p'_1 \end{aligned} \quad (40)$$

unter Verwendung der Beziehung

$$u = 2(m^2 + M^2) - s - t, \quad (41)$$

erhalten wir schließlich

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} = \frac{2e^4}{s^2} \left\{ s^2 + 2[(m^2 + M^2)^2 + (s - 2m^2 - 2M^2)t + t^2] \right\}_{m, M \rightarrow 0} \cong \frac{2e^4}{s^2} (s^2 + 2st + 2t^2). \quad (42)$$

Dabei haben wir im letzten Schritt den ultrarelativistischen Limes $s \geq M^2, m^2$ betrachtet. Wir rechnen im folgenden der Übersichtlichkeit halber in diesem Limes weiter. Führen wir den Streuwinkel ϑ im Schwerpunktsystem ein, ergibt sich

$$t = -2P_1 P'_1 (1 - \cos \vartheta) = -\frac{s}{2} (1 - \cos \vartheta), \quad (43)$$

⁵Das $i0^+$ im Nenner können wir weglassen, da aufgrund der Kinematik stets $s \geq 4M^2$ sein muß, wir also nicht in die Nähe des Pols geraten können.

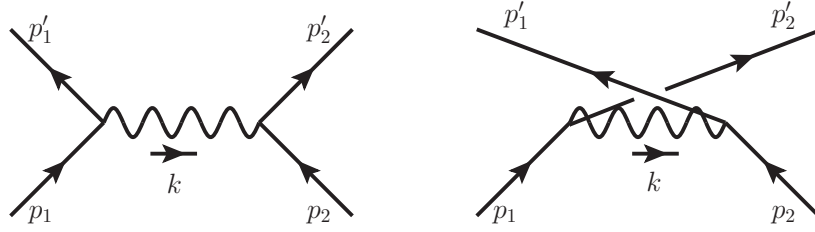


Abbildung 4: Die Diagramme zur Møllerstreuung in führender Ordnung gemäß „moderner“ Feynmanregeln.

wo $P_1 = |\vec{p}_1|$ usw. bedeuten sollen. Daraus folgt für das Matrixelement

$$|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2 = e^4(1 + \cos^2 \vartheta) = 16\pi^2\alpha^2(1 + \cos^2 \vartheta). \quad (44)$$

Für den invarianten Streuquerschnitt⁶ liefert dies das wohlbekanntes Resultat

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}(1 + \cos^2 \vartheta). \quad (45)$$

Die Winkelabhängigkeit ist charakteristisch für Spin-1/2-Teilchen. Der totale Streuquerschnitt ergibt sich durch Integration (mit $x = \cos \vartheta$) zu

$$\sigma(s) = 2\pi \int_{-1}^1 dx \frac{\alpha^2}{4s}(1 + x^2) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}. \quad (46)$$

Die Resultate (45) und (46) stimmen gut mit Messungen der JADE-Kollaboration am DESY [B⁺85] überein. In diesem Paper werden die Abweichungen der Winkelverteilungen vom Resultat (45) aufgrund der schwachen Wechselwirkungen untersucht. Es werden dort auch QED-Korrekturen der nächsthöheren Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^3)$ berücksichtigt.

3.2 Elastische Elektronenstreuung

Als weiteres Beispiel betrachten wir noch die elastische Elektronenstreuung (Møller-Streuung) [Mø132]. In führender Ordnung mit „modernen“ Feynmanregeln gemäß Abb. 2 haben wir die beiden in Abb. 4 gezeigten Diagramme zu berücksichtigen. Wie im vorherigen Abschnitt am Beispiel der $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ -Vernichtung gezeigt, tragen die Terme $\propto k^\mu U^\nu$, $\propto k^\nu U^\mu$ und $k^\mu k^\nu$ im Photonpropagator (28) nicht zu den Amplituden bei, und wir können gleich den Feynman-Propagator (30) verwenden. Unter Berücksichtigung der Vorzeichenregel für das Austauschdiagramm erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{i}{e^2} \mathcal{M}_{fi} = & -\frac{i}{t} \bar{u}(p'_1, \sigma'_1) \gamma^\mu u(p_1, \sigma_1) \bar{u}(p'_2, \sigma'_2) \gamma_\mu u(p_2, \sigma_2) \\ & + \frac{i}{u} \bar{u}(p'_2, \sigma'_2) \gamma^\mu u(p_1, \sigma_1) \bar{u}(p'_1, \sigma'_1) \gamma_\mu u(p_2, \sigma_2). \end{aligned} \quad (47)$$

⁶zur Definition des Streuquerschnittes in Bezug der hier verwendeten Normierungskonvention der Matrixelemente vgl. wieder [Hee02]

Dabei haben wir wieder die Mandelstamvariablen

$$t = (p'_1 - p_1)^2 = (p'_2 - p_2)^2, \quad u = (p'_1 - p_2)^2 = (p'_2 - p_1)^2 \quad (48)$$

eingeführt.

Zur Bildung der Spinsummen der betragsquadrirten Amplitude können wir wieder die üblichen Regeln für Diracmatrizen und die Spinsummenregeln (23) verwenden. Wir geben sogleich wieder das über die Spins im Anfangszustand (Endzustand) gemittelte (summierte) Resultat an

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^4} \overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} &= \frac{1}{4t^2} \text{Tr}[(\not{p}'_1 + m)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{p}'_2 + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\nu] \\ &\quad - \frac{1}{4tu} \text{Tr}[(\not{p}'_1 + m)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}'_2 + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\nu] \\ &\quad + \frac{1}{4u^2} \text{Tr}[(\not{p}'_2 + m)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{p}'_1 + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\nu] \\ &\quad - \frac{1}{4tu} \text{Tr}[(\not{p}'_2 + m)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}'_1 + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\nu]. \end{aligned} \quad (49)$$

Dabei haben wir die Mandelstamvariablen

$$t = (p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2, \quad u = (p_1 - p'_2)^2 = (p_2 - p'_1)^2 \quad (50)$$

eingeführt. Die Dirac-Spuren sind wieder schnell mit Hilfe des Computeralgebrapaketes **Tracer** berechnet. Im Schwerpunktsystem haben wir die folgenden Viererimpulse

$$p_1 = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} E \\ -\vec{p} \end{pmatrix}, \quad p'_1 = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p}' \end{pmatrix}, \quad p'_2 = \begin{pmatrix} E \\ -\vec{p}' \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Dabei ist $E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} = \sqrt{m^2 + \vec{p}'^2} = \sqrt{m^2 + P^2}$. Wegen $|\vec{p}| = |\vec{p}'| := P$ ist nur noch der Streuwinkel ϑ , der durch

$$\vec{p}\vec{p}' = P^2 \cos \vartheta \quad (52)$$

definiert ist, als weitere unabhängige Variable der Streukinematik frei festzulegen. Wir drücken im folgenden alle Größen durch E und ϑ aus. Der differentielle Streuquerschnitt ergibt sich wieder aus der allgemeinen Formel aus [Hee02] zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2}{256\pi^2\omega^2} = \frac{\alpha^2}{4\omega^2} \frac{(2\omega^2 - m^2)^2}{(\omega^2 - m^2)^2} \left[\frac{4}{\sin^4 \vartheta} - \frac{3}{\sin^2 \vartheta} + \frac{(\omega^2 - m^2)^2}{(2\omega^2 - m^2)^2} \left(\frac{4}{\sin^2 \vartheta} + 1 \right) \right]. \quad (53)$$

Betrachten wir noch den ultrarelativistischen und den nichtrelativistischen Limes $\omega \gg m$ bzw. $P^2 = \omega^2 - m^2 \ll m^2$. Das ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &\underset{\omega \gg m}{\cong} \frac{\alpha^2}{\omega^2} \left(\frac{4}{\sin^4 \vartheta} - \frac{2}{\sin^2 \vartheta} + \frac{1}{4} \right), \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &\underset{P \ll m}{\cong} \frac{\alpha^2 m^2}{4P^4} \left(\frac{4}{\sin^4 \vartheta} - \frac{3}{\sin^2 \vartheta} + \mathcal{O}(P^2/m^2) \right). \end{aligned} \quad (54)$$

Wir sehen, daß dieser Ausdruck für $P \rightarrow 0$ sowie für alle Schwerpunktsenergien für $\vartheta \rightarrow 0, \pi$ divergiert. Ebenso divergiert der totale Streuquerschnitt. Dies rührt daher, daß die Photonen masselos sind, denn es ist gemäß (50) und (51)

$$t = -2P^2(1 - \cos \vartheta), \quad u = -P^2(1 + \cos \vartheta), \quad (55)$$

und dies sind gerade die im Nenner des Photonpropagators auftretenden kinematischen Größen. Diese **Infrarotdivergenzen** lassen sich beseitigen, indem man die endliche Energieauflösung des Detektors berücksichtigt und bedenkt, daß aufgrund ihrer Masselosigkeit beliebig viele sehr weiche Photonen emittiert werden können, deren Gesamtenergie kleiner als die Energieauflösung des Detektors ist. Summiert man all diese Beiträge auf, erhält man ein endliches von der Energieauflösung des Detektors abhängiges Resultat für den gesamten Streuquerschnitt [BN37, Wei95]. Von dem divergenten kinematischen Bereich für $\vartheta \rightarrow 0, \pi$ abgesehen, stimmt die **Møllersche Formel** (53) hervorragend mit dem gemessenen differentiellen Streuquerschnitt überein.

Literatur

- [B⁺85] W. Bartel, et al., New results on $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ from the JADE detector at PETRA, Z. Phys. C **26** (1985) 507
<http://dx.doi.org/10.1007/BF01551792>
- [BN37] F. Bloch, A. Nordsieck, Note on the radiation field of the electron, Phys. Rev. **52** (1937) 54
<http://link.aps.org/abstract/PR/V52/P54>
- [Hee02] H. van Hees, Introduction to Quantum Field Theory (2002)
<http://theorie.physik.uni-giessen.de/~hees/publ/lect.pdf>
- [Hee07] H. van Hees, Hohlraumstrahlung (2007)
<http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/rad/index.html>
- [Mø132] C. Møller, Zur Theorie des Durchgangs schneller Elektronen durch Materie, Ann. Physik **406** (1932) 531
<http://dx.doi.org/10.1002/andp.19324060506>
- [Wei95] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, vol. 1, Cambridge University Press (1995)