

Die neutralen K-Mesonen und CP-Verletzung

Hendrik van Hees
mailto:hees@physik.uni-bielefeld.de
Fakultät für Physik
Universität Bielefeld
Universitätsstraße 25
D-33615 Bielefeld

17. Juli 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Phänomenologisches	1
2	Heuristische Beschreibung der Oszillation	2
3	CP-Invarianz	4
4	Die CP-Verletzung	5
5	Das Superweak-Modell	5
A	Die Wigner-Weisskopf-Näherung	7

1 Phänomenologisches

Wir folgen der Darstellung in [Nac86]. Die K-Mesonen wurden in Reaktionen der Art $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda$ entdeckt. Es zeigte sich, daß mit diesen Teilchen eine neue additive intrinsische Quantenzahl, die „Strangeness“ („Seltsamkeit“) genannt wurde, verbunden ist. Die K^0 -Mesonen tragen per definitionem die Strangeness $S = 1$. Die weiteren Quantenzahlen sind Isospin $I = 1/2$, Spin $J = 0$ und Parität -1 . Sie sind also wie die Pionen pseudoskalare Mesonen.

In diesem Artikel interessieren wir uns nicht so sehr für die genaue Dynamik der Kaonen, deren Beschreibung quantenfeldtheoretische Modelle erfordern würde, sondern mehr für deren Verhalten unter den diskreten Symmetrietransformationen P (Raumspiegelungen) und C (Ladungskonjugation). Daß die Kaonen *pseudoskalare Mesonen* sind, bedeutet, daß die Kaonenzustände Paritätseigenzustände mit Eigenwert -1 sind:

$$\mathbf{P} |K^0\rangle = - |K^0\rangle. \quad (1)$$

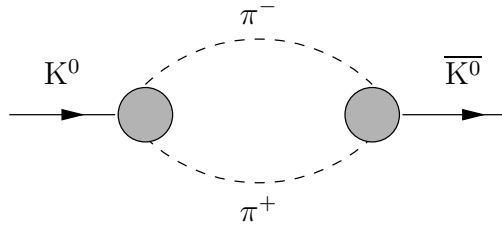


Abbildung 1: Die Kaonenoszillation in effektiven Modellen der schwachen Wechselwirkungen von Hadronen: Das Zweipionen-Austauschdiagramm führt zu einer „spontanen“ Umwandlung eines Kaons in ein Antikaon und zurück (man kann die Pfeile auch einfach umkehren).

Dabei steht $|K^0\rangle$ für einen beliebigen Eigenzustand eines freien ruhenden Kaons und \mathbf{P} für den *unitären* Paritätsoperator.

Da die Kaonen elektrisch neutral sind, könnte man meinen, sie seien identisch mit ihren Antiteilchen, d.h. *strikt neutral*. Sie tragen jedoch eine ladungsartige Quantenzahl, eben die Strangeness und sind damit nicht strikt neutral, d.h. die Antikaonen tragen Strangeness $S = -1$ und sind damit wohlunterscheidbar von den neutralen Kaonen, d.h. zu jedem Kaonzustand gibt es einen Antikaonzustand¹. Wie alle Antiteilchen besitzt das Antikaon exakt die gleichen Eigenschaften wie das Kaon bis auf die Tatsache, daß es Strangeness $S = -1$ besitzt. Die Ladungskonjugation wird also durch

$$\mathbf{C} |K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \quad \mathbf{C} |\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle \quad (2)$$

dargestellt, wobei \mathbf{C} ein *unitärer Operator* ist. Die Hintereinanderausführung von Raumspiegelung und Ladungskonjugation, also CP , wird durch den *unitären Operator* \mathbf{CP} repräsentiert und wirkt wegen (2) und (2) wie folgt auf die Teilchenzustände:

$$\mathbf{CP} |K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle, \quad \mathbf{CP} |\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle. \quad (3)$$

Da die starke Wechselwirkung die Strangeness erhält, erfolgt der Zerfall der neutralen Kaonen durch die schwache Wechselwirkung. Typische Zerfallsprozesse sind $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$ und $\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$.

Insbesondere können die Zerfälle des Kaons und des Antikaons in *gleiche Endzustände* erfolgen. Aus der Quantenfeldtheorie folgt daraus, daß ein Kaon spontan in ein Antikaon (und umgekehrt) übergehen kann. Im Rahmen eines mikroskopischen effektiven quantenfeldtheoretischen Modells wird eine solche *Oszillation* durch ein Zweipionen-Austauschdiagramm (s. Abb. 1) repräsentiert.

2 Heuristische Beschreibung der Oszillation

Wir versuchen nun die durch Abb. 1 angedeutete Möglichkeit der Teilchenoszillation ohne Zuhilfenahme eines bestimmten Modells, also allein aufgrund des quantenmechanischen Formlismus² zu verstehen.

Betrachten wir dazu zunächst einfach ein instabiles Teilchen, z.B. ein π^+ . Wir interessieren uns jetzt nur für dieses Pion und nicht für seine Zerfallsprodukte. Zur Zeit $t = 0$ liege ein Pion vor,

¹Hier und im folgenden meinen wir mit „Kaon“ oder „Antikaon“ stets die neutralen Kaonen.

d.h. der normierte Zustandsvektor des Pions ist zur Zeit $t = 0$

$$|\psi, t = 0\rangle = |\pi^+\rangle. \quad (4)$$

Da das Pion in andere Teilchen zerfällt, kann die Zeitentwicklung dieses Zustandes nicht unitär sein, d.h. im Schrödingerbild ist der Zustandsvektor der unzerfallenen Pionen zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ ist durch

$$|\psi, t\rangle = \exp\left[-i\left(m_\pi - \frac{i}{2}\Gamma_\pi\right)t\right] |\psi, t\rangle \quad (5)$$

gegeben². Hierin ist $m_\pi \approx 139\text{MeV}$ die Masse des Pions und Γ_π seine totale Zerfallsbreite. Die Wahrscheinlichkeit, das Pion nach der Zeit t noch zu finden, ist dann

$$\langle\psi, t|\psi, t\rangle = \exp(-\Gamma_\pi t). \quad (6)$$

Bei den Kaonen verhält es sich etwas komplizierter, da nach den obigen Überlegungen auch Übergänge von Kaonen zu Antikaonen möglich sind. Das bedeutet, daß der Schrödingerbild-Zustandsvektor im gemeinsamen Zustandsraum von Kaonen und Antikaonen anzusetzen ist, also eine beliebige *Superposition* aus Kaonen- und Antikaonenzuständen sein muß:

$$|\psi, t\rangle = \psi_1(t) |K^0\rangle + \psi_2(t) |\overline{K}^0\rangle. \quad (7)$$

Wegen $\langle\overline{K}^0|K^0\rangle = 0$ sind die Wahrscheinlichkeiten, ein Kaon bzw. Antikaon anzutreffen:

$$|\langle\psi, t|K^0\rangle|^2 = |\psi_1(t)|^2 \text{ bzw. } \langle\psi, t|\overline{K}^0\rangle = |\psi_2(t)|^2. \quad (8)$$

Wie beim Zerfall eines einzelnen Teilchens kann man die Zeitentwicklung des Kaonenzustands (7) näherungsweise durch eine *nicht unitäre Zeitentwicklung* beschreiben. Dies tun wir am bequemsten als Zeitentwicklung für die Amplituden, die wir zu \mathbb{C}^2 -Spaltenvektoren zusammenfassen:

$$\psi(t) := \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} = \exp(-i\mathcal{M}t)\psi(0), \quad (9)$$

wobei \mathcal{M} eine *nichthermitesche* $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ -Matrix ist. Sie läßt sich freilich wie folgt durch hermitesche Matrizen ausdrücken:

$$\mathcal{M} = \mathbf{M} - \frac{i}{2}\mathbf{\Gamma}, \text{ mit } \mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathcal{M} + \mathcal{M}^\dagger), \quad \mathbf{\Gamma} = i(\mathcal{M} - \mathcal{M}^\dagger). \quad (10)$$

Um die *nichtunitäre* Zeitentwicklungsmatrix in (9) berechnen zu können, müssen wir \mathcal{M} diagonalisieren. Die Eigenwerte sind komplex. Wir schreiben für die Eigenwerte M_s bzw. M_l

$$\mathcal{M}|K_s\rangle = M_s|K_s\rangle, \quad \mathcal{M}|K_l\rangle = M_l|K_l\rangle, \quad (11)$$

²Bemerkung: Es ist klar, daß dies quantentheoretisch keine exakte Aussage ist, sondern eine Näherung, die wir im Anhang mit Hilfe der zeitabhängigen Störungstheorie begründen werden. Tatsächlich ist es natürlich so, daß wir einen ganzen Vielteilchenraum mit einer unspezifizierten Teilchenzahl, also den *Fockraum*, der aus der Quantenmechanikvorlesung im Zusammenhang mit der „zweiten Quantisierung“ bekannt ist, benötigen. Der reine Zustand des Systems ist also $|\Psi, t\rangle = |\pi^+, \text{Rest}, t\rangle$, wobei „Rest“ für alle Teilchen steht, die kein π^+ sind. Will man diesen Rest einfach vergessen, muß man nach den Grundlagen der Quantentheorie die Spur über den Rest bilden, und man erhält einen *gemischten Zustand*, also eine Dichtematrix für die π^+ . Wir wollen hierauf jedoch nicht im Detail weiter eingehen.

wobei M_s und M_l komplexe Zahlen mit negativen Imaginärteilen sind:

$$M_s = \left(m_s - \frac{i}{2}\Gamma_s \right), \quad M_l = \left(m_l - \frac{i}{2}\Gamma_l \right) \quad \text{mit } m_s, m_l \in \mathbb{R}, \quad \Gamma_s, \Gamma_l > 0. \quad (12)$$

Da $\mathcal{M} = \mathbf{T}^{-1} \text{diag}(M_s, M_l) \mathbf{T}$ mit einer i.a. *nicht unitären Matrix* \mathbf{T} ist, gilt i.a. $\langle \mathbf{K}_s | \mathbf{K}_l \rangle \neq 0$. Wir legen diese beiden Zustände durch Normierung und geeignete Phasenwahl so fest, daß das $\langle \mathbf{K}_s | \mathbf{K}_l \rangle \in \mathbb{R}$ ist:

$$\langle \mathbf{K}_s | \mathbf{K}_s \rangle = \langle \mathbf{K}_l | \mathbf{K}_l \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{K}_l | \mathbf{K}_s \rangle \geq 0. \quad (13)$$

Die \mathcal{M} -Eigenzustandsvektoren sind nun zwar nicht orthogonal, aber sie bilden immer noch eine Basis des Zweizustandssystems, d.h. wir können schreiben

$$|\psi, t=0\rangle = \psi_1(0) |\mathbf{K}^0\rangle + \psi_2(0) |\overline{\mathbf{K}^0}\rangle = c_s |\mathbf{K}_s\rangle + c_l |\mathbf{K}_l\rangle. \quad (14)$$

Wegen (9), (11) und (12) ist die Zeitentwicklung eines allgemeinen Anfangszustandes für das \mathbf{K}^0 - $\overline{\mathbf{K}^0}$ -System also durch

$$|\psi, t\rangle = \exp \left[-i \left(m_s - \frac{i}{2}\Gamma_s \right) t \right] |\mathbf{K}_s\rangle + \exp \left[-i \left(m_l - \frac{i}{2}\Gamma_l \right) t \right] |\mathbf{K}_l\rangle \quad (15)$$

gegeben.

Ein rein exponentieller Zerfall liegt nur dann vor, wenn entweder $c_l = 1$ und $c_s = 0$ oder $c_l = 0$ und $c_s = 1$ ist, also zur Zeit $t = 0$ ein reiner \mathcal{M} -Eigenzustand vorliegt. Die Zerfallskonstanten sind Γ_l und Γ_s . Wir setzen obdA. $\Gamma_s \geq \Gamma_l$, wobei dann s und l für „short“ und „long“ stehen, d.h. das Kaon bzw. Antikaon ist die Superposition eines längerlebigen und eines kürzerlebigen Anteils. Man nennt die entsprechenden Zustände im Teilchenphysikerslang „K-long“ und „K-short“.

3 CP-Invarianz

Jetzt nehmen wir an, die Wechselwirkungen der Kaonen erfülle die CP-Invarianz, d.h. CP-Eigenzustände gehen durch die von den Wechselwirkungen bedingten Zerfälle der Kaonen stets in CP-Eigenzustände zum gleichen Eigenwert des Operators \mathbf{CP} über. Wegen $(\mathbf{CP})^2 = 1$ sind die möglichen Eigenwerte ± 1 , und wir finden mit Hilfe von (3) leicht die dazugehörigen Eigenvektoren:

$$|\mathbf{K}_{\pm}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\mathbf{K}^0\rangle \mp |\overline{\mathbf{K}^0}\rangle \right), \quad \mathbf{CP} |\mathbf{K}_{\pm}^0\rangle = \pm |\mathbf{K}_{\pm}^0\rangle. \quad (16)$$

Respektieren nun die Wechselwirkungen die CP-Symmetrie, muß die verallgemeinerte Massennmatrix \mathcal{M} in dieser Basis diagonal sein, und die $|\mathbf{K}_{\pm}^0\rangle$ stimmen mit $|\mathbf{K}_s\rangle$ und $|\mathbf{K}_l\rangle$ überein.

Betrachten wir die Zerfälle $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$, $\pi^0 \pi^0$, für ein ruhendes K^0 , sehen wir, daß die Zweipionenzustände einen Gesamtdrehimpuls, der mit ihrem Bahndrehimpuls im Schwerpunktsystem übereinstimmt, weil sie Spin 0-Teilchen sind, $l = 0$ haben müssen, denn die Kaonen haben ebenfalls Spin 0.

Die geladenen Pionen haben eine innere Parität -1 , und ihre Ruhezustände haben folglich folgendes CP-Verhalten:

$$\mathbf{CP} |\pi^{\pm}\rangle = - |\pi^{\mp}\rangle. \quad (17)$$

Um das Verhalten der neutralen Pionen zu untersuchen, brauchen wir noch die Information, daß es strikt neutral ist. Da ein Bahndrehimpulseigenzustand stets die Parität $(-1)^l$ besitzt und die Pionen negative innere Parität haben, ist der Zweipionenzustand ein Paritätseigenzustand zum Eigenwert $+1$.

Ladungskonjugation ändert die Endzustände nicht, so daß der Kaonenzustand, der in einen Zweipionenzustand übergeht, $|K_+^0\rangle$ sein muß.

Es werden nun aber auch Kaonzerfälle in 3 Pionen beobachtet, die entsprechend zum negativen CP-Eigenzustand gehören. Die Zerfallszeiten in Zwei- bzw. Dreipionenzustände sind $\tau_s = (0,8923 \pm 0,0022) \cdot 10^{-10}$ s bzw. $\tau_l = (5,183 \pm 0,040) \cdot 10^{-8}$ s und folglich $|K_s\rangle = |K_+^0\rangle$ und $|K_l\rangle = |K_-^0\rangle$.

4 Die CP-Verletzung

Es ist nun im Prinzip einfach, die CP-Erhaltung zu testen. Begibt man sich nur in eine hinreichende Entfernung zu einer Kaonenquelle, kann man sicher sein, daß praktisch nur noch Kaonen im Zustand $|K_l\rangle$ vorliegen, denn (15) zeigt, daß in Entfernungen groß gegen $c\tau_s$ aber klein gegen $c\tau_l$ praktisch nur noch die Komponente $|K_l\rangle$ relevant ist³.

Wäre nun die CP-Symmetrie der schwachen Wechselwirkung exakt erfüllt, dürften diese Kaonen nur in drei Pionen zerfallen. Es hat sich nun bei der Durchführung genau eines solchen Experiments [JHCFT64] (1980 Nobelpreis für Cronin und Fitch) gezeigt, daß mit der kleinen Wahrscheinlichkeit von etwa $3 \cdot 10^{-3}$ die langlebigen Kaonen doch in zwei Pionen zerfallen. Dann ist also entweder der „Masseneigenzustand“ $|K_l^0\rangle$ nicht identisch mit dem CP-Eigenzustand $|K_-^0\rangle$ oder die schwache Wechselwirkung erlaubt Übergänge dieses CP-Eigenzustands in zwei Pionen.

Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, ist weder die eine noch die andere Möglichkeit mit der CP-Erhaltung verträglich.

5 Das Superweak-Modell

Wir wollen nun ein einfaches phänomenologisches Modell für die CP-Verletzung besprechen, das *Superweak-Modell* [Wol64].

Ein bekanntes Theorem der relativistischen Quantenfeldtheorie besagt, daß jede relativistisch invariante⁴ Quantenfeldtheorie, die lokal und kausal ist und deren Hamiltonoperator nach unten beschränkt ist, automatisch auch unter der „großen Spiegelungstransformation“ **CPT** invariant ist. Diese wird durch einen *antiunitären Operator im Hilbertraum* repräsentiert.

Wir benutzen diese Tatsache nun, um die Gestalt der Massenmatrix \mathcal{M} etwas genauer zu spezifizieren. Dazu schreiben wir die Massenmatrix bzgl. **CP**-Eigenzuständen

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{++} & \Delta\mathcal{M}_{+-} \\ \Delta\mathcal{M}_{-+} & \mathcal{M}_{--} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

³Die Kaonen werden vornehmlich in Streuprozessen aufgrund der starken Wechselwirkung erzeugt. Da diese die Strangeness erhält und Teilchen ohne Strangeness aufeinandergeschossen werden, werden immer Kaonen und Antikaonen in ihren Flavoureigenzuständen $|K^0\rangle$ bzw. $|\overline{K}^0\rangle$ auftreten.

⁴Dazu ist es nur erforderlich, daß die Theorie unter eigentlich orthochronen Poincaré-Transformationen (Gruppe P_+^\uparrow) invariant ist!

Gemäß (43) ist dann

$$\Delta\mathcal{M}_{jk} = \langle K_j^0 | \mathbf{H}'' | K_k^0 \rangle, \quad j, k \in \{+, -\}. \quad (19)$$

Dabei soll \mathbf{H}'' der CP-verletzende Anteil der Wechselwirkung sein, die von den „superschwachen Kraft“ herrührt. Die Diagonalelemente sind die vollständigen verallgemeinerten Massen M_l und M_s gemäß (12). Wir vernachlässigen dabei in (43) die Terme in höherer als erster Ordnung in \mathbf{H}'' .

Wählt man nun geeignete Phasen für die Zustände $|K^0\rangle$ und $|\overline{K}^0\rangle$, so gilt

$$\mathbf{CPT} |K^0\rangle = |\overline{K}^0\rangle, \quad \mathbf{CPT} |\overline{K}^0\rangle = |K^0\rangle. \quad (20)$$

Die **CPT**-Invarianz der Gesamtwechselwirkung besagt dann, daß

$$\langle K^0 | \mathcal{M} | K^0 \rangle = \langle \overline{K}^0 | \mathcal{M} | \overline{K}^0 \rangle. \quad (21)$$

Schreiben wir die Flavoureigenzustände gemäß (16) als Linearkombinationen von CP-Eigenzuständen, folgt für die Massenmatrix

$$\Delta\mathcal{M}_{+-} = -\Delta\mathcal{M}_{-+}. \quad (22)$$

Da in der in (19) gegebenen Näherung $\Delta\mathcal{M}_{jk}$ hermitesch ist, muß also $\Delta\mathcal{M}_{+-}$ rein imaginär sein.

Die Masseneigenwerte sind dann in niedrigster Ordnung im Entwicklungsparameter

$$\epsilon = \frac{\Delta\mathcal{M}_{+-}}{\mathcal{M}_{++} - \mathcal{M}_{--}} \quad (23)$$

durch

$$M_s = \mathcal{M}_{++}, \quad M_l = \mathcal{M}_{--}, \quad |K_s\rangle = |K_+^0\rangle + \epsilon_s |K_-^0\rangle, \quad |K_l\rangle = |K_-^0\rangle + \epsilon_l |K_+^0\rangle \quad (24)$$

gegeben. Es ergibt sich daraus

$$\epsilon_s = \epsilon_l = \epsilon = \frac{\Delta\mathcal{M}_{+-}}{M_l - M_s}. \quad (25)$$

Durch Vergleich mit dem Experiment erhalten wir für $\Delta\mathcal{M}_{+-}$ einen positiv imaginären Wert mit

$$|\Delta\mathcal{M}_{+-}| \approx 3 \cdot 10^{-3} (m_l - m_s) \approx 10^{-14} \text{MeV}. \quad (26)$$

Die Superweak-Wechselwirkungsenergie ist also noch um einen Faktor 1000 kleiner als die von der schwachen Wechselwirkung herrührende Massendifferenz der lang- und kurzlebigen Kaonen. Heutzutage erklärt man die CP-Verletzung im Rahmen des Standardmodells als ein Prozeß höherer Ordnung („Box-Diagramm“). Die CP-verletzenden Terme der Massenmatrix $\Delta\mathcal{M}_{+-}$ ergeben sich dabei aus einer Phase in der sog. Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix, welche die Mischung der Quark-Masseneigenzustände zu den Quark-Flavoureigenzuständen beschreibt. Ob das Standardmodell tatsächlich die gemessene CP-Verletzung korrekt wiedergibt, ist noch unentschieden. Das theoretische Problem ist die genaue Ermittlung der Wellenfunktionen der neutralen Kaonen aus der Quantenchromodynamik (QCD), welche die starke Wechselwirkung beschreibt. Experimentell ist das Problem die genaue Bestimmung der Mischungsstärke $b \rightarrow u$ (Bottom-Quark zu Up-Quark), ein Übergang der noch nicht gefunden wurde. Falls genauere Experimente die obere Schranke für diese Übergangsstärke eines Tages weiter nach unten drücken sollten, kann es sein, daß mit dem elektroschwachen Standardmodell die CP-Verletzung nicht mehr erklärt werden kann. Dies ist bis heute allerdings nicht der Fall.

A Die Wigner-Weisskopf-Näherung

In diesem Anhang wollen wir die quantentheoretische Begründung der in (9) eingeführten nichtunitären Massenmatrix geben. Wir folgen wieder der Darstellung in [Nac86], weichen aber weiter unten ein wenig davon ab, um die Natur der Näherungen besser zu verstehen.

Dazu denken wir uns den Hamiltonoperator für die Elementarteilchen in einen Anteile aufgespalten, die zur starken bzw. schwachen Wechselwirkung gehören:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'. \quad (27)$$

Wir betrachten nun den Zerfall von diskreten entarteten \mathbf{H}_0 -Eigenzuständen $|\alpha\rangle$ zum Eigenwert E_0 . Wir haben hierbei insbesondere ruhende neutrale Kaonen und Antikaonen im Blick. Wir fragen nun nach dem Zerfall dieser Zustände in irgendwelche anderen Teilchen. I.a. werden dies Vielteilchenzustände $|\beta\rangle$ mit kontinuierlichen \mathbf{H}_0 -Eigenwerten E_β sein.

Wigner und Weisskopf haben eine einfache Methode gefunden, zum gleichen Resultat zu gelangen, die ausschließlich auf quantentheoretischen Grundlagen beruht, ohne daß man ein bestimmtes quantenfeldtheoretisches Modell benutzen muß.

Dazu gehen wir ins Wechselwirkungsbild bzgl. \mathbf{H}' über. Wir bezeichnen die Operatoren im Schrödinger-Bild mit \mathbf{O}_S . Diese Operatoren sind definitionsgemäß zeitunabhängig (es sei denn es liegt eine explizite Zeitabhängigkeit vor). Insbesondere sind \mathbf{H}_{0S} und \mathbf{H}'_S zeitunabhängig. Aus Konvergenzgründen schreiben wir jedoch

$$\mathbf{H}'_S(t) = \exp(\eta t)\mathbf{H}'_S. \quad (28)$$

Dabei ist $\eta > 0$. Wir stellen uns die schwache Wechselwirkung also ab $t \rightarrow -\infty$ langsam eingeschaltet vor. Am Schluß der Rechnung nehmen wir $\eta \rightarrow 0$. Hier ist η eine Art *Regularisierungsparameter*, den wir ab der zweiten Ordnung Störungstheorie benötigen, wenn wir das hier gestellte Problem lösen wollen: Die Berechnung der „Entvölkerung“ von Energieeigenzuständen bzgl. \mathbf{H}_0 aufgrund einer gegen \mathbf{H}_0 kleinen Störung \mathbf{H}' . Für den Fall, daß wir nur Übergangsmatrixelemente zwischen Zuständen verschiedener Energie berechnen wollen, benötigen wir diese Methode des „*adiabatic switching*“ nicht, jedoch liefert sie das gleiche Resultat wie die naive zeitabhängige Störungsrechnung ohne Regulator.

Wir gelangen nun vom Schrödingerbild zum Wechselwirkungsbild, indem wir eine zeitabhängige unitäre Transformation der Operatoren und Zustände vornehmen:

$$|\psi, t\rangle = \exp(-i\mathbf{H}_0 t) |\psi, t\rangle_S, \quad \mathbf{H}'(t) = \exp(i\mathbf{H}_0 t)\mathbf{H}'_S \exp(-i\mathbf{H}_0 t), \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{0S}. \quad (29)$$

Die Schrödingerzustände genügen der Zeitentwicklungsgleichung

$$i\partial_t |\psi, t\rangle = \mathbf{H}_S |\psi, t\rangle_S. \quad (30)$$

Daraus folgt wegen (27) und (29) für die Zustände im Wechselwirkungsbild

$$i\partial_t |\psi, t\rangle = \mathbf{H}'(t) |\psi, t\rangle. \quad (31)$$

Wir können nun jeden Hilbertraumvektor, also auch den gemäß dem Wechselwirkungsbild zeitabhängigen Zustandsket, nach dem vollständigen orthonormierten Satz der \mathbf{H}_0 -Eigenzustände entwickeln:

$$|\psi, t\rangle = \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha(t) |\alpha\rangle + \sum_{\beta} b_\beta(t) |\beta\rangle. \quad (32)$$

Dabei haben wir der Einfachheit halber auch für die kontinuierlichen Zustände eine Summe geschrieben, obwohl eigentlich ein Integral gemeint ist. Man kann sich etwa vorstellen, daß man ein großes „Quantisierungsvolumen“ einführt und dadurch ein vollständig diskretes Energiespektrum erhält. Dann kann man sich die Kontinuumszustände im Limes eines unendlichen Quantisierungsvolumens vorstellen. Diese Betrachtung ist auch für die Streutheorie und die Definition der S -Matrix nützlich (vgl. dazu [Hee02]).

Die \mathbf{H}_0 -Eigenzustände sind nun zeitunabhängig, da $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{0S}$ zeitunabhängig ist. Bilden der Zeitableitung von (32), Anwendung der Bewegungsgleichung (30) und Multiplizieren der entstehenden Gleichung mit $\langle \alpha |$ bzw. $\langle \beta |$ liefert das folgende Differentialgleichungssystem für die Koeffizienten a_α und b_β :

$$\dot{a}_\alpha(t) = -i \exp(\eta t) \sum_{\alpha'=1}^n H'_{\alpha\alpha'} a_{\alpha'} - i \exp(\eta t) \sum_{\beta'} \exp[i(E_0 - E_\beta)t] H'_{\alpha\beta'} b_{\beta'} \quad (33)$$

$$\dot{b}_\beta(t) = -i \exp(\eta t) \sum_{\alpha'} \exp[i(E_\beta - E_0)t] H'_{\beta\alpha'} a_{\alpha'} - i \exp(\eta t) \sum_{\beta'} \exp[i(E_\beta - E_{\beta'})t] H'_{\beta\beta'} b_{\beta'} \quad (34)$$

Dabei haben wir die Matrixelemente (ohne den „Switching factor“ $\exp(\eta t)$) des Störhamiltonoperators \mathbf{H}' im *Schrödingerbild* eingeführt:

$$H'_{\gamma\gamma'} = \langle \gamma | \mathbf{H}'_S | \gamma' \rangle, \quad \gamma, \gamma' \in \{\alpha, \beta\}. \quad (35)$$

Diese sind zeitunabhängig, so daß auf der rechten Seite der Gleichungen (33) und (34) nur die Exponentialfunktionen und die gesuchten Koeffizienten a_α und b_β zeitabhängig sind.

Die Wigner-Weisskopfnäherung ergibt sich nun in zwei Schritten:

Die Anfangsbedingungen unseres Problems sind nun die folgenden: Bei $t = t_0$ soll nur ein Teilchen, dessen Zerfall wir betrachten wollen, vorhanden sein (also ein Kaon oder Antikaon), d.h. es ist

$$a_\alpha(t_0) = \psi_\alpha^0, \quad b_\beta(t_0) = 0. \quad (36)$$

Unter Berücksichtigung dieser Anfangsbedingungen läßt sich bei Vernachlässigung der β' -Summe in (34) diese Gleichung in eine Integralgleichung umformen:

$$b_\beta(t) = -i \exp(\eta t) \int_{t_0}^t dt' \sum_{\alpha'} \exp[i(E_\beta - E_0)t'] H_{\beta\alpha'} a_{\alpha'}(t'). \quad (37)$$

Das Weglassen der schwachen Wechselwirkung der Zerfallsprodukte untereinander ist die erste *Näherung*. Dies in die ebenfalls mit $\int_0^t dt'$ integrierte Gleichung (33) eingesetzt ergibt schließlich ein Integralgleichungssystem für die *endlich vielen* Koeffizienten a_α :

$$\begin{aligned} a_\alpha(t) = & \psi_\alpha^0 - i \int_{t_0}^t dt_1 \exp(\eta t_1) \sum_{\alpha'} H'_{\alpha\alpha'} a_{\alpha'}(t_1) \\ & + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \exp[\eta(t_1 + t_2)] \sum_{\alpha', \beta} \exp[i(E_0 - E_\beta)(t' - t'')] H'_{\alpha\beta} H'_{\beta\alpha'} a_{\alpha'}(t_2). \end{aligned} \quad (38)$$

Wir können durch Iteration eine Reihe in Matrixelementen $H'_{\gamma\gamma'}$ mit $\gamma, \gamma' \in \{\alpha, \beta\}$ gewinnen. Dabei wenden wir nun die Idee des „adiabatic switching“ an und nehmen die untere Grenze der

Integrale $t_0 \rightarrow -\infty$. Dann ist

$$a_\alpha(t) = \psi_\alpha^0 - \frac{i \exp(\eta t)}{\eta} \sum_{\alpha'} H_{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha'}^0 + \frac{(-i)^2 \exp(2\eta t)}{2\eta} \sum_{\beta\alpha'} \frac{H'_{\alpha\beta} H'_{\beta\alpha'}}{E_0 - E_\beta + i\eta} \psi_{\alpha'}^0 + \frac{(-i)^2 \exp(2\eta t)}{2\eta^2} \sum_{\alpha', \alpha''} H'_{\alpha\alpha''} H'_{\alpha''\alpha'} \psi_{\alpha'}^0. \quad (39)$$

Leiten wir dies wiederum nach der Zeit ab, folgt

$$\dot{a}_\alpha(t) = -i \exp(\eta t) \sum_{\alpha'} H_{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha'}^0 + (-i)^2 \exp(2\eta t) \sum_{\beta\alpha'} \frac{H'_{\alpha\beta} H'_{\beta\alpha'}}{E_0 - E_\beta + i\eta} \psi_{\alpha'}^0 + \frac{(-i)^2 \exp(2\eta t)}{\eta} \sum_{\alpha', \alpha''} H'_{\alpha\alpha''} H'_{\alpha''\alpha'} \psi_{\alpha'}^0. \quad (40)$$

Nun läßt sich $\psi_{\alpha'}^0$ durch Invertierung von (39) abgesehen von Beiträgen in zweiter und höherer Ordnung in den Matrixelementen H' durch die $a_\alpha(t)$ ausdrücken:

$$\psi_\alpha^0 = a_\alpha(t) + \frac{i \exp(\eta t)}{\eta} \sum_{\alpha\alpha'} H_{\alpha\alpha'} a_{\alpha'}(t). \quad (41)$$

Dies reicht aus, um (40) bis hin zu Größen zweiter Ordnung in $H'_{\alpha\beta}$ und $H'_{\alpha\alpha'}$ durch eine für $\eta \rightarrow 0$ *endliche Gleichung* ausdrücken:

$$\dot{a}_\alpha \underset{\eta \rightarrow 0}{\cong} = -i \sum_{\alpha'} \Delta \mathcal{M}_{\alpha\alpha'} a_{\alpha'} \quad (42)$$

mit der „Massenkorrekturmatrix“

$$\Delta \mathcal{M}_{\alpha\alpha'} = H'_{\alpha\alpha'} + \mathcal{P} \sum_{\beta} \frac{1}{E_0 - E_\beta} H'_{\alpha\beta} H_{\beta\alpha'} - i\pi \sum_{\beta} \delta(E_0 - E_\beta) H'_{\alpha\beta} H'_{\beta\alpha'}. \quad (43)$$

Dabei bezeichnet \mathcal{P} den Cauchyschen Hauptwert des Integrals⁵. Es wurde dabei die wichtige Formel

$$\int dx \frac{f(x)}{x - x_0 + i\eta} \underset{\eta \rightarrow 0}{\cong} -i\pi f(x_0) + \mathcal{P} \int dx \frac{f(x)}{x - x_0} \quad (44)$$

verwendet, die für jede Funktion stetige im Unendlichen hinreichend schnell fallenden Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt, die in einer Umgebung von x_0 zu einer komplexen Funktion analytisch fortsetzbar ist. Für endliches η definiert dann das Integral auf der linken Seite offenbar eine komplexe Funktion $F(x_0)$, die in der ganzen oberen Halbebene analytisch ist. Wir können dabei für hinreichend kleine η den Integrationsweg deformieren, indem wir statt entlang der reellen Achse entlang der Kontur \mathcal{C} integrieren, die in Abb. 2 gezeichnet ist. Das Integral entlang des kleinen Halbkreises K_η berechnen wir mittels einer konkreten Parametrisierung desselben:

$$K_\eta: x(t) = x_0 - \eta \exp(-it), \rightarrow \int_{K_\eta} dx \frac{f(x)}{x - x_0} = i \int_0^\pi dt f[x_0 - \eta \exp(-it)] \underset{\eta \rightarrow 0}{\cong} i\pi f(x_0). \quad (45)$$

⁵Es sei nochmals daran erinnert, daß \sum_β über die kontinuierlichen Energieeigenzustände für ein Integral steht!

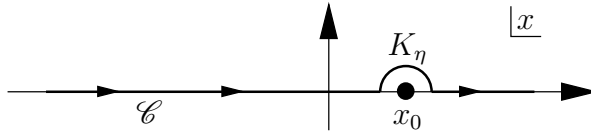


Abbildung 2: Kontur zum Beweis von (44).

Weiter ist die Definition des Hauptwertes

$$\mathcal{P} \int dx \frac{f(x)}{x - x_0} = \lim_{\eta \rightarrow 0_+} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \eta} dx \frac{f(x)}{x - x_0} + \int_{x_0 + \eta}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - x_0} \right], \quad (46)$$

was dem Integral entlang dem Rest von \mathcal{C} für $\eta \rightarrow 0_+$ entspricht.

Betrachten wir nun wieder den Zustand im Schrödingerbild, folgt

$$\langle \alpha | \psi, t \rangle_S = a_\alpha(t) \exp(-iE_0), \quad (47)$$

sehen wir, daß unsere unhermitesche Massenmatrix, die wir in (9) eingeführt haben, in dieser Näherung durch

$$\mathcal{M}_{\alpha\alpha'} = E_0 + \Delta \mathcal{M}_{\alpha\alpha'} \quad (48)$$

gegeben ist. Insbesondere folgt aus der Hermitizität von $H'_{\alpha\beta}$ die positive Definitheit des antihermiteschen Anteils gemäß (10):

$$\frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\alpha'} = \pi \sum_{\beta} H_{\alpha\beta} H_{\beta\alpha'} \delta(E_0 - E_\beta). \quad (49)$$

Literatur

- [Hee02] H. van Hees, Introduction to Quantum Field Theory, URL <http://theory.gsi.de/~vanhees/index.html> (2002)
- [JHCFT64] J. W. C. J. H. Christenson, V. L. Fitch und R. Turlay, Evidence for the 2π Decay of the K_2^0 Meson. Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 138, URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/V13/P138/>
- [Nac86] O. Nachtmann, Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden (1986)
- [Wol64] L. Wolfenstein, Violation of CP Invariance and the Possibility of Very Weak Interactions. Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 562, URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/V13/P562/>