

Herr Einstein, Herr Podolski und Herr Rosen

Ernst-Udo Wallenborn

23. Juni 1999

1 Was ist EPR?

Die Frage muß richtig lauten: *Wer* waren *EPR*?

2 Wer waren EPR?

EPR waren Albert Einstein, Boris Podolski und Nathan Rosen. Die drei Herren veröffentlichen im Jahre 1935 einen aufsehenerregenden Artikel in *Physical Review* mit dem Titel: „Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?“ [EPR35]. Der Artikel löste eine kontroverse Diskussion aus, in der zunächst Niels Bohr in derselben Zeitschrift unter demselben Titel antwortete [Boh35].

3 Um was ging es in dem Artikel?

Kurz geht um folgendes Problem: Ein Quantensystem, dessen Wellenfunktion zu einem Zeitpunkt t_0 *vollständig* bekannt ist, wird so in zwei Teile zerlegt, daß die beiden Teilsysteme einen *verschränkten Zustand* (siehe Abbildung 1 und die FAQ zum Zeilinger-Experiment) bilden. Diese Teilsysteme werden räumlich voneinander getrennt. Dann wird an einem Teilsystem eine Messung vorgenommen. Der Ausgang dieser Messung bestimmt bei einem verschränkten Zustand sofort den Ausgang einer analogen Messung am anderen Teilsystem.

Ein wenig anschaulicher formuliert: In einem Raum seien drei Personen, *Alice*, *Bob*, und *Trent*. Trent hat einen kleinen Stapel aus vier Karten, Pik-As, Pik-Sieben, Karo-As und Karo-Sieben. Alice zieht eine Karte. Sie zeigt sie Bob, der daraufhin eine der drei verbliebenen Karten auswählt. Die drei haben vorher ausgemacht, daß, wenn Alice ein As zieht, Bob eine Sieben wählt (und umgekehrt), und daß, wenn Alice eine rote Karte zieht, Bob eine schwarze wählt (und umgekehrt). Wenn Alice also die Pik-Sieben zieht, nimmt Bob das Karo-As. Alice und Bob gehen nun in getrennte Nebenräume und Trent, der nicht weiß, wer welche Karte hat, versucht herauszufinden, welche Karte Bob hat, indem er Alice oder Bob nach der Farbe oder dem Wert ihrer oder seiner Karte befragt. Wenn er annimmt, daß die beiden nicht lügen, reicht es, wenn er etwa zu Alice geht und fragt: „Ist deine Karte rot oder schwarz?“, dann zu Bob geht und ihn fragt: „Hast du eine Sieben oder ein As?“ Aus den beiden Antworten kann Trent sofort bestimmen, wer welche Karte hat. So weit ist die Sache völlig trivial, und weder Einstein noch Bohr haben irgendein Problem damit.

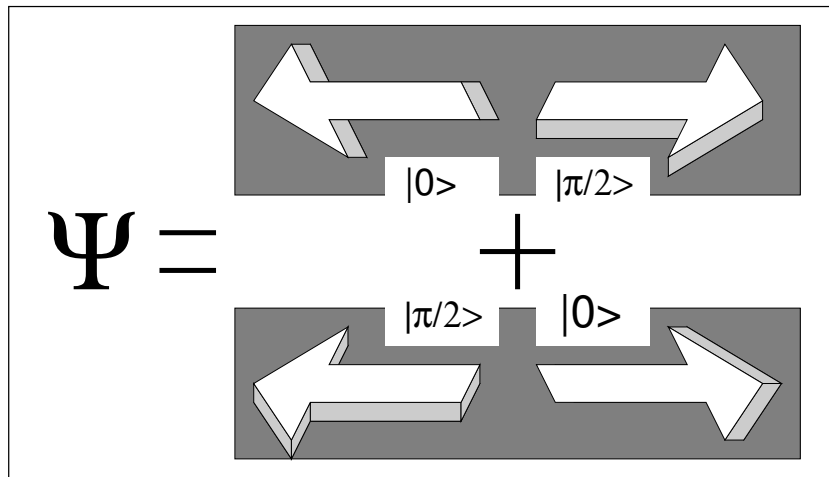


Abbildung 1: Ein verschränkter Zustand ist ein Zustand, in dem zwei Untersysteme eines Quantensystems korreliert sind. Beispielsweise bilden zwei Photonen (horizontale Pfeile), die durch *parametric down-conversion* aus derselben Quelle (hier durch Kreise symbolisiert) entstanden sind, einen verschränkten Zustand. Messung der Polarisationsrichtung ergibt für beide Photonen jedes mögliche Ergebnis (hier sind „vertikal“ und „horizontal“ skizziert und mit $|0\rangle$ und $|\pi/2\rangle$ bezeichnet), wobei aber beide Photonen bei jedem möglichen Ausgang der Messung zueinander orthogonal sind. Ein Beobachter, der nur ein Photon „lokal“ beobachtet, wird die Verschränkung nicht bemerken, erst die gleichzeitige Messung beider Photonen bringt sie an den Tag. Konsequenterweise kann keine Theorie des Meßprozesses, die lediglich lokale Messungen erlaubt (ein *lokales Realitätskriterium* beinhaltet) den verschränkten Zustand korrekt beschreiben.

Nehmen wir an, die drei wiederholen das viele Male. Trent hat sich am Abend vorher eine Liste gemacht, wann er wem welche Frage stellt, trägt während des Experiments die Antworten in diese Liste ein und rechnet nachher die statistische Verteilung der Antworten aus. Dann wird er finden, daß Bob je in der Hälfte der Fälle eine rote beziehungsweise schwarze Karte hat, und je in der Hälfte der Fälle eine Sieben beziehungsweise ein As. Dabei wird Bobs Statistik unabhängig davon sein, wem Trent welche Fragen gestellt hat, und Bobs und Alices Aussagen werden perfekt korreliert sein. Soweit ist die Sache immer noch klar.

Einstein, Podolski und Rosen erkannten nun, daß die Quantenmechanik etwas erlaubt, was auf folgendes hinausläuft: Bob und Alice haben einen Spion, *Mallet*, beauftragt, vor dem Beginn des Experiments eine Fotokopie von Trents Liste zu besorgen. Die beiden wissen also, welche Fragen Trent wann wem stellen wird, und sie haben vereinbart: Wenn Trent Alice nach der Farbe fragen wird, wählt Bob zwar eine Karte, die die jeweils andere Farbe hat, den Wert aber wählt er zufällig. Wenn Alice also das Pik-As hat, wirft Bob im Geiste eine Münze und wählt zufällig zwischen Karo-As und Karo-Sieben aus. Wenn Trent Alice nach dem Wert fragen wird, wählt Bob entsprechend die Farbe zufällig aus. Das Experiment läuft nun wie geplant ab, am Abend setzt sich Trent über seine Liste mit den Fragen und Antworten und wird stutzig: Bobs Statistik, für sich betrachtet, sieht genauso aus wie vorher, jeweils 25% Pik-As, Pik-Sieben, Karo-As und Karo-Sieben. Vergleicht er aber Bobs und Alices Karten, so sieht er: Immer wenn er Alice zuerst nach der Farbe gefragt hat, sind die Farben von Alices und Bobs Karten noch korreliert, die Werte aber nicht. Fragt Trent jedoch Alice zuerst nach dem Wert, sind die Werte korreliert, die Farben aber nicht, so als ob Bob bei der Kartenwahl gewußt hätte, welche Frage Trent als erstes stellen würde. Für Trent gibt es nun drei mögliche Schlußfolgerungen:

1. Bob hat tatsächlich vorher gewußt, welche Frage Trent Alice stellen würde. Die beiden müssen also entweder einen Spion angeheuert haben, oder es muß eine mit der Farbe und dem Wert von Spielkarten in Zusammenhang stehende, Trent unbekannte (*versteckte*) Eigenschaft geben, die die Antworten von Alice und Bob vorherbestimmt. In jedem Fall ist Trents Information über das Experiment unvollständig.
2. Alice hat Bob über eine Trent unbekanntes Kommunikationsline Trents Frage mitgeteilt, während Trent auf dem Weg zu Bob war. Bob hat dann einem Versteck eine geeignete Karte entnommen.
3. Farbe und Wert sind nicht Eigenschaften einzelner Karten, sondern beider Karten zusammen. Zwar kann man die Karten von Alice und Bob problemlos einzeln betrachten (beider Statistik ist gleich: jeweils 25 % Pik-As, Pik-Sieben, Karo-As und Karo-Sieben), betrachtet man jedoch die Korrelation von Alices und Bobs Karten, kann man diese nicht mit einem lokalisierten Konzept „Spielkarte“ beschreiben.

In der Sprache der Quantenmechanik und bezogen etwa auf die Aspect-Experimente (siehe [AGR81], [ADR82] und [AGR82], aber auch [FC72]) bedeuten diese drei Möglichkeiten:

1. Die Beschreibung des Experiments durch die herkömmliche Quantenmechanik ist prinzipiell unvollständig.
2. Die Beschreibung des Experiments durch die herkömmliche Quantenmechanik ist insofern unvollständig, als eine Wechselwirkung zwischen den beiden Quantensystemen existiert, die nicht in der ursprünglichen Beschreibung enthalten war.

3. Die beiden Quantensysteme können in diesem speziellen Fall gar nicht als getrennte Quantensysteme beschrieben werden; nur eine Beschreibung des gesamten Systems kann die experimentellen Resultate erklären.

Alle drei Möglichkeiten aber erweisen sich bei näherem Hinsehen als problembehaftet:

1. Diese Möglichkeit ist die naheliegendste, von EPR vermutete und theoretisch wie experimentell am besten untersuchte. Die Idee ist, daß die Observablen, die im quantenmechanischen Experiment gemessen werden, in Wirklichkeit Funktionen eines unterliegenden, vollständigen Satzes, *versteckter* physikalischer Größen sind. Was im Experiment gemessen wird, wäre dann lediglich eine statistische Verteilung der abgeleiteten Funktionen, deren Werte jederzeit vorherbestimmbar wären, wenn man die versteckten Variablen in die Beschreibung miteinbeziehen würde.

An dieser Möglichkeit haben sich einige große Geister versucht, angefangen bei Schrödinger selbst. Allerdings ist bei keinem dieser Versuche eine brauchbare Theorie herausgekommen, und es ist instruktiv, zu untersuchen, warum (bis jetzt) alle diese Versuche scheiterten. Entsprechend wird sich der Rest dieser FAQ hauptsächlich damit beschäftigen.

2. Man kann die beiden Messungen, die den Fragen nach Kartenfarbe und -wert entsprechen, so durchführen, daß sie durch ein raumartiges Raumzeitintervall getrennt sind. Auf deutsch heißt das: die vermutete Wechselwirkung zwischen den beiden Systemen muß sich dann mit Überlichtgeschwindigkeit auswirken. Da dies ohne weiteres zur Informationsübertragung zwischen den beiden Punkten, an denen die Messungen stattfinden, benutzt werden könnte, hieße das, daß die Relativitätstheorie an einem ihrer zentralen Punkte überarbeitet werden müßte.

Die Hauptschwäche dieser Möglichkeit ist, daß Informationsübertragung mit Überlichtgeschwindigkeit experimentell bis heute nicht beobachtet wurde, und daß einige aufsehenerregende Experimente in der jüngeren Vergangenheit gerade dies sehr deutlich machten. Sollte Trent sich wirklich für diese Schlußfolgerung entscheiden, müßte er eine Theorie finden, die die Relativitätstheorie an einem sehr zentralen und experimentell sehr gründlich überprüften Punkt ersetzen kann. Generell ist die Relativitätstheorie eine der experimentell am besten abgesicherten Theorien, und die Suche nach einem „EPR-kompatiblen“ Ersatz für die Relativitätstheorie wäre ein nobelpreisträchtiges, aber chancenarmes Unternehmen.

3. Eine Realitätsauffassung, die die Frage der Realität der an der Messung beteiligten Quantensysteme vom Ausgang der Messung—nämlich davon, ob EPR-Korrelationen beobachtbar sind oder nicht—abhängig macht, erklärt die Realität eben dieser Systeme zu einer *a posteriori*-Eigenschaft des spezifischen Experiments. Das läuft aller Alltagserfahrung entgegen, und scheint auf den ersten Blick auch vollkommen unphysikalisch: Das Experiment muß ja schließlich in mathematischen Ausdrücken und Gleichungen beschreibbar sein. In diesen Gleichungen müssen die am Experiment beteiligten Dinge repräsentiert sein, und diese Repräsentationen müssen doch unabhängig vom Ausgang des Experiments sein. EPR diskutierten diesen Punkt und erachteten folgendes Kriterium für das Konzept „Realität“ als hinreichend (aber nicht notwendig):

„If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e. with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity.“
[EPR35]

Diese Definition stellt bereits eine Konzession an die Quantenmechanik—insbesondere an die Unschärferelation—dar. EPR bestehen nicht darauf, daß alle denk- und vorstellbaren Observablen auch in der quantenmechanischen Beschreibung als real angesehen werden können, sondern nur die dispersionsfrei meßbaren. Wenn also etwa in einem Spinresonanzexperiment die Observablen S^2 und S_z gemessen beziehungsweise in der theoretischen Beschreibung berechnet werden, dann haben die beiden anderen Projektionen des Spinoperators, S_x und S_y eben keine Realität mehr, da sie nicht mehr dispersionsfrei sind (in den Worten von EPR: da ihre Werte nicht mehr mit Sicherheit vorausgesagt werden können).

EPR sind damit bereit, die Frage der Realität physikalischer Größen zu einem *a posteriori* der theoretischen Beschreibung und damit zu einem *a posteriori* des experimentellen Aufbaus (der ja in die theoretische Beschreibung eingeht) zu machen. Das in [EPR35] beschriebene „Paradox“ jedoch liegt eine Schicht tiefer: ein strikt lokales Realitätskriterium verlangt, daß die Frage der Realität der Observablen im zweiten Quantensystem ist abhängig vom Ausgang der Messungen am ersten Quantensystem, die aber (EPR lehnten Möglichkeit 2 selbstverständlich strikt ab) das zweite Quantensystem in keiner Weise beeinflussen kann. Das hielten sie für undenkbar:

„No reasonable definition of reality can be expected to permit this.“
[EPR35]

4 Was war Bohrs Antwort?

Noch im selben Jahr erschien, ebenfalls in *Physical Review* Bohrs Antwort [Boh35]. Der siebenseitige Artikel ist eine der am gründlichsten mißverstandenen Veröffentlichungen in der Geschichte der Quantenmechanik. Bohr ist der Ansicht, daß die Trennung in Untersysteme, die sich nach EPR offensichtlich „in keiner Weise beeinflussen“ [EPR35] können, inkorrekt ist. Dazu weist er (in einer Fußnote) darauf hin, daß das gesamte EPR-Argument invariant unter unitären Transformationen ist. Statt sich auf lokalisierte Observablen (q_1, p_1) und (q_2, p_2) , etwa Ort und Impuls zweier nach einem Streuexperiment auseinanderfliegender Teilchen zu beziehen, könnten EPR auch transformierte Variablen

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta & P_1 &= p_1 \cos \theta + p_2 \sin \theta \\ Q_2 &= -q_1 \sin \theta + q_2 \cos \theta & P_2 &= -p_1 \sin \theta + p_2 \cos \theta \end{aligned}$$

verwenden, und das ganze Argument würde genauso funktionieren, mit einer Ausnahme: Das einzige, was in [EPR35] *nicht* invariant unter unitären Transformationen ist, ist die Forderung, räumlich voneinander getrennte Systeme unter allen Umständen getrennt betrachtet werden dürfen. Wenn statt (q_1, p_1) und (q_2, p_2) also (Q_1, P_1) und (Q_2, P_2) betrachtet werden, die von beiden Systemen gleichzeitig abhängen, wird der wechselseitige Einfluß der beiden Systeme offensichtlich.

Nun ist Invarianz unter unitären Transformationen in der Quantenmechanik eine wichtige Forderung an die zugrundeliegende Observablenalgebra. EPR präsentieren ein Argument, das

an zentraler Stelle, nämlich eben mit der Annahme, die Untersysteme könnten sich nicht beeinflussen, weil sie räumlich getrennt seien, diese Invarianz verletzt, da diese Annahme nur für die Observablenpaare (q_1, p_1) und (q_2, p_2) erfüllt ist, nicht aber für die transformierten Observablen (Q_1, P_1) und (Q_2, P_2) . Bohr hält das für unzulässig. Seines Erachtens ist die Annahme der Wechselwirkungsfreiheit ohne weiteres nicht korrekt.

Bohr hätte das einfach so hinschreiben können. Stattdessen jedoch entwickelt er im Haupttext einige physikalische und philosophische Argumente, die seine Ansicht untermauern sollen. Zunächst skizziert ein simples Doppelspaltexperiment in dem zwei Elektronen an einer Maske gebeugt werden, deren Spalte weit voneinander entfernt sind (verglichen mit der Wellenlänge der Elektronen). Der Impuls der Maske wird vor und nach der Wechselwirkung mit den Elektronen mit beliebig hoher Genauigkeit gemessen. Dadurch sind die Summe der transversalen Impulse $(p_1 + p_2)$ und die Differenz der Orte der Elektronen $(q_1 - q_2)$ bekannt¹ Wird nun mit einem Detektor der Ort eines der beiden Elektronen in einem gewissen Abstand hinter der Maske bestimmt, so ist der Ort des zweiten Elektrons ebenfalls bekannt. Ebenso könnte man den Impuls des einen Elektrons hinter dem Spalt messen, und dadurch auch den des anderen Elektrons bestimmen. Bohr nennt das *Komplementarität*.

Bei genauem Hinsehen erweist sich *Komplementarität* allerdings als rhetorischer Trick: Das EPR-Argument richtete sich, wie oben beschrieben, ja nicht dagegen, daß im skizzierten Experiment der Aufbau der Meßapparatur das Realitätskriterium der meßbaren Größen darstellt, sondern dagegen, daß das Ergebnis der Messung an Elektron 1 das Ergebnis der Messung an Elektron 2 determiniert. Die Gültigkeit der Heisenbergschen Unschärferelation wird von EPR ja nicht angezweifelt. Bohr beantwortet mit dem Konzept der Komplementarität scheinbar eine Frage, die EPR gar nicht gestellt hatten.

Umgekehrt beantwortet er eine Frage nicht, die EPR tatsächlich gestellt hatten. Das skizzierte Experiment könnte ja so modifiziert werden, daß erst während der Flugzeit der Elektronen hinter der Maske entschieden wird, ob Ort oder Impuls von Elektron 1 bestimmt und damit Ort oder Impuls von Elektron 2 festgelegt wird. Dann ist nicht klar, wie Elektron 2 „wissen“ kann, ob nun sein Ort oder sein Impuls unbestimmt sein soll². In diesem Fall wäre es leicht, auszuschließen, daß die Elektronen über eine gemeinsame Wechselwirkung via Maske „kommunizieren“ können.

Bohr hingegen argumentiert, die Maske und die Elektronen bildeten grundsätzlich ein gemeinsames Quantensystem. Die wechselwirkungsfreie Messung einer Elektroneneigenschaft durch Maske und Detektoren sei ohnehin unmöglich, da durch die Wechselwirkung mit der Doppelspaltmaske werde diese ja selber zu einem Teil des gesamten Quantensystems, und nicht etwa ein klassisch zu beschreibendes Meßinstrument. Er erörtert dann die Grenzziehung zwischen einem zu untersuchenden Quantensystem und der klassisch zu beschreibenden Meßapparatur und bemängelt, daß EPR ein Quantensystem mit einem im Wesentlichen klassischen, strikt lokalen, Realitätsbegriff zu fassen versuchen:

„From our point of view we now see that the wording of the above-mentioned criterion of physical reality proposed by Einstein, Podolsky and Rosen contains an ambiguity as regards the meaning of the expression ‚without in any way disturbing the system‘.“

[Boh35]

¹Da die Messungen der Maskenimpulse mit beliebig hoher Genauigkeit durchgeführt werden, ist der Ort der Maske und damit q_1 und q_2 selber nach Heisenberg beliebig ungenau.

²In sehr ähnlicher Form ist das Experiment 1982 tatsächlich durchgeführt worden, siehe [ADR82]

Die Tatsache, daß diese philosophische Einstellung Bohrs als *Kopenhagener Interpretation* Eingang in die Begriffswelt der Quantenmechanik gefunden haben, hat für viel Verwirrung gesorgt, und einen Begriff geschaffen, der nie sauber definiert wurde und den Konflikt, dem er seine Entstehung verdankt, um viele Jahre überlebt hat.

Warum aber hat Bohr ein klares physikalisches Problem in diffusen philosophischen Kategorien behandelt? Nun, die Antwort ist, daß erstens 1935 noch keine Möglichkeit bestand, zwischen den beiden Positionen experimentell zu unterscheiden (diese wurde erst dreißig Jahre später geschaffen), und daß das theoretische Invarianzargument nur innerhalb der Quantenmechanik funktioniert. Wenn EPR der Hoffnung Ausdruck geben, eine zukünftige vervollständigte Quantenmechanik werde das EPR-Problem nicht mehr haben, so können sie antworten, eine zukünftige vervollständigte Quantenmechanik werde auch die Frage der Invarianz unter unitären Transformation beziehungsweise der Verletzung derselben durch die Forderung nach einem lokalen Realitätsbegriff zur Zufriedenheit aller beantworten. Und so griff Bohr zu physikalisch-philosophischen Plausibilitätsargumenten. Ein Modellexperiment skizzierend, erklärt er: „Für mich scheint plausibel, daß Quantensysteme nicht wegen bloßer räumlicher Trennung auch als unkorreliert zu betrachten sind“.

5 Was sind hidden-variable-Theorien

Hidden-variable-Theorien sind der Versuch, Möglichkeit 1 aus Abschnitt 3 in eine funktionierende Theorie umzusetzen. Der grundsätzliche Gedanke ist, daß die beobachtbaren Größen durchaus real sind, aber von unterliegenden, *versteckten* Größen abhängen. Wenn etwa A eine physikalische Größe ist, dann ist A „in Wirklichkeit“ eine Funktion eines (zunächst gar nicht näher bestimmten) Satzes von versteckten Variablen (üblicherweise mit λ bezeichnet), also gleich $A(\lambda)$. Was dann „in Wirklichkeit“ gemessen wird, wenn A gemessen wird, ist das Ensemblemittel von $A(\lambda)$:

$$\bar{A} = \int A(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda \quad (1)$$

wobei $\rho(\lambda)$ gleich der Wahrscheinlichkeitsdichte ist, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit das System sich in einem Mikrozustand befindet, in welchem die versteckte(n) Variable(n) einen Wert zwischen λ und $\lambda + \delta\lambda$ aufweisen.

Das mag nun reichlich esoterisch scheinen, beschreibt aber, um ein Beispiel für eine erfolgreiche *hidden-variable*-Theorie zu nennen, exakt die Verbindung zwischen der klassischen phänomenologischen Thermodynamik und der statistischen Thermodynamik: die Temperatur T eines Systems etwa ist eine fundamentale Größe in der phänomenologischen Thermodynamik. In der statistischen Thermodynamik aber ist sie eine Funktion des Erwartungswertes der Summe der kinetischen Energien der Atome des Systems:

$$T(E_{\text{kin}}) = \frac{3}{2Nk}E_{\text{kin}}$$

wobei N die Teilchenzahl und k die Boltzmannkonstante ist. Für ein System, in dem die Teilchenzahl N , das Volumen V und die Temperatur T konstant sind, ist die (zu messende) Temperatur:

$$\bar{T} = \int T(E_{\text{kin}})\rho(E_{\text{kin}})dE_{\text{kin}}$$

wobei die Zustandsdichte $\rho(E_{\text{kin}})$ hier einfach durch den Boltzmannfaktor $\exp\{-E/kT\}$ gegeben ist. Die verschiedenen Mikrozustände zu verschiedenen kinetischen Energien bilden ein

Ensemble, und in diesem Fall nennt man es ein *NVT*-Ensemble oder schlicht ein *kanonisches Ensemble*.

Bezogen auf die Quantenmechanik und EPR war nun die Hoffnung, eine *hidden-variable*-Theorie würde das scheinbare Paradox auflösen. Die im von EPR vorgeschlagenen Experiment gemessenen Größen wären dann nicht mehr fundamental, ihre Unbestimmtheit (und damit letztlich auch die Heisenbergsche Unschärferelation) seien nicht Folge der fundamentalen algebraischen Struktur der Quantenmechanik, sondern lediglich eine Folge unseres mangelnden Verständnisses der physikalischen Vorgänge und unserer mangelnden Fähigkeit, die versteckten Variablen zu entdecken. Bezogen auf das oben beschriebene Spiel von Alice, Bob und Trent heißt das, das Trent bei seiner Analyse die Existenz eines Spions miteinbeziehen muß, durch den Alice und Bob über Trents Fragen informiert sind, bevor er sie gestellt hat.

Konkret auf EPR bezogen hieße das, daß die im EPR-Experiment zu messenden Photonenpolarisationen oder Elektronenspins schon ganz am Anfang durch einen Satz versteckter Variablen festliegen.

6 Was ist die Bohm-Theorie?

Der grundsätzliche Gedanke der „Hidden-Variable“-Theorie von David Bohm [Boh51] ist, daß es eine Wellenfunktion Ψ gibt, die auf reale (als punktförmige Teilchen gedachte) Partikel eine Kraft ausübt. Die Trajektorien, denen die Teilchen tatsächlich folgen, wären dann bestimmt durch die „normale“ physikalische Potentiallandschaft, der das durch Ψ erzeugte Führungspotential überlagert ist, und sonst lediglich durch die ganz konventionelle Mechanik. In [Hol93] sind einige Spezialfälle dargestellt, die zeigen, daß die Bohm-Theorie einfache Streu- und Beugungsexperimente qualitativ durchaus richtig beschreiben kann.

Bei genauerer Analyse zeigt die Theorie jedoch rasch Schwachstellen:

1. Quantenstatistik: Die Theorie enthält keine Vorkehrung, Teilchen, die sich auf derselben Bahn bewegen, miteinander derart wechselwirken zu lassen, daß das Bohm-Äquivalent einer Fermi-Dirac-Statistik entsteht. Konkret müßte eine Wirkung eines Teilchens auf Ψ stattfinden, die es allen gleichartigen Teilchen verbietet, dieselbe Bahn zu benutzen. Wie das in einer im wesentlichen klassischen Mechanik konkret funktionieren soll, ist bis heute nicht überzeugend demonstriert worden.

Ein Beispiel: molekularer Wasserstoff, H_2 , kommt in zwei, sich durch ihre Spinkonfiguration unterscheidenden Formen, *ortho*- und *para*-Wasserstoff, vor. *Para*-Wasserstoff, in dem, salopp gesagt, die Kernspins der beiden Protonen entgegengesetzt ausgerichtet sind, ist energetisch günstiger, dafür gibt es drei Möglichkeiten, die Kernspins so auszurichten, daß *ortho*-Wasserstoff entsteht (der Fachausdruck lautet: *ortho*-Wasserstoff hat die Multiplizität 3). Das hat zur Folge, daß bei Temperaturen in der Nähe von 0 K Wasserstoff fast ausschließlich in der energetisch günstigeren *para*-Form vorliegt, bei Raumtemperatur jedoch zu 75% als *ortho*-Wasserstoff. Das Phänomen ist in der herkömmlichen Quantenmechanik wohlverstanden und eine direkte Folge der Tatsache, daß die Atomkerne des Wasserstoffs Fermionen sind. Eine Beschreibung dieses elementaren Phänomens im Rahmen der Bohmschen Theorie steht noch aus; sie wäre aber Voraussetzung dafür, die Bohmsche Theorie zu einer eigentlichen Theorie der Materie zu erweitern. Ohne eine solche Erweiterung jedoch ist die Bohmsche Theorie der üblichen Quantenmechanik bereits im Popperschen Sinne unterlegen [Pop84]: modernere metatheoretische Betrachtungen erübrigen sich dann sogar.

2. Knoten: Da die Teilchen klassischer Mechanik (mit einem nichtklassischen Potential) gehorchen, können sie Knotenflächen der Aufenthaltswahrscheinlichkeit nicht durchdringen [Hol93]. Konsequenterweise darf es solche Knotenflächen in den Trajektorien nicht geben. Das ist ein schwerwiegendes Problem, bedeutet es doch, daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Teilchen keine Nullstellen aufweisen dürfen. Dies in Einklang mit experimentellen Tatsachen zu bringen ist bislang nicht gelungen.

Während der erste Einwand ein metatheoretischer ist, der die Theorie dafür kritisiert, daß sie etwas nicht leistet, was die handelsübliche Quantentheorie ohne weiteres bereitstellt, aber umgekehrt nicht vermag, was diese nicht könnte, ist der zweite Einwand ein praktischer, welcher sich auf einen elementaren Widerspruch zu experimentell beobachtbaren Tatsachen bezieht. Die Bohmsche Theorie (so sie denn eine sein will und nicht bloße Interpretation) stößt also, obwohl in sich konsistent, sowohl in der übergeordneten metatheoretischen als auch in der untergeordneten experimentellen Ebene auf bislang ungelöste und nach Ansicht des Autors unlösbare Probleme.

7 Was ist das Kochen-Specker-Theorem?

Das Kochen-Specker-Theorem ist der jüngste in einer Reihe von Versuchen, die Unmöglichkeit bestimmter Klassen von „hidden variable“-Theorien theoretisch zu beweisen. Das Kochen-Specker-Theorem wurde in [KS67] (nachgedruckt in [Hoo75]) veröffentlicht; die Darstellung hier richtet sich im wesentlichen nach [Red87] und dem exzellenten Übersichtsartikel [Mer93].

Angenommen, eine Teilchenquelle emittiere Atome im Triplettzustand, also mit der Spinquantenzahl $S = 1$. Weiterhin angenommen, in einiger Entfernung von der Quelle befinde sich eine Apparatur, die das Quadrat des Spins in jeder beliebigen Richtung messen kann (die Apparatur sei um alle Raumachsen drehbar, und zwar schnell genug, daß noch während der Flugzeit des Atoms das interne Koordinatensystem der Apparatur gegenüber dem Laborsystem verändert werden kann). Im internen Koordinatensystem der Meßapparatur sind dann die Operatoren für den Spin (in Einheiten von \hbar) gegeben durch die drei Paulimatrizen für $S = 1$ [PMH84]:

$$S_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es ist sofort ersichtlich, daß die drei Operatoren nicht kommutieren, entsprechend haben sie zwar dieselben Eigenwerte, aber unterschiedliche Eigenvektoren:

$$\text{Eig}(S_x) = \left(\begin{array}{c|ccc} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\text{Eig}(S_y) = \left(\begin{array}{c|ccc} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\text{Eig}(S_z) = \left(\begin{array}{c|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ihre Quadrate hingegen:

$$S_x^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_y^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kommutieren, da sie einen gemeinsamen Satz von Eigenvektoren (zu unterschiedlichen Eigenwerten) haben:

$$\begin{aligned} \text{Eig}(S_x^2) &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ \text{Eig}(S_y^2) &= \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ \text{Eig}(S_z^2) &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Damit sind, wenn alle drei Quadrate gemessen werden, genau drei Meßergebnisse möglich: $(S_x^2, S_y^2, S_z^2) = (1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, oder $(1, 1, 0)$. Das bedeutet: bei jeder beliebigen Ausrichtung der Meßapparatur ergeben die drei Messungen der Quadrate der Spinoperatoren genau einmal 0 und zweimal 1. In welcher der drei Richtungen die 0 gemessen wird, ist jedoch quantenmechanisch nicht festgelegt.

Eine *hidden variable*-Theorie, die sagt, daß die Meßergebnisse für das Atom bereits nach Verlassen der Quelle determiniert (aber noch unbekannt) sind, muß nun einen Algorithmus bereitstellen, mit dem bereits kurz nach Emission des Atoms unter Einbeziehung der versteckten Variablen das spätere Meßergebnis im Detail vorhergesagt werden kann. Da zu diesem Zeitpunkt aber die Ausrichtung der Meßapparatur noch nicht fixiert ist, muß sie das für *jede mögliche* Ausrichtung können. Und da die Operatoren kommutieren, muß die Voraussage für das Ergebnis etwa der S_z^2 -Messung unabhängig von einer Rotation um die z -Achse sein, also unabhängig davon, welche beiden anderen Vektoren nun konkret x und y sind. (Wenn die Operatoren kommutieren, ist die Reihenfolge, in welcher die Messungen durchgeführt werden, irrelevant. Insbesondere kann S_z^2 als erstes gemessen werden. Wäre nun S_z^2 abhängig von der Wahl der beiden anderen Vektoren, so wäre mit anderen Worten der Wert von S_z^2 abhängig von einer *zukünftigen* Messung von S_x^2, S_y^2 resp. $S_{x'}^2, S_{y'}^2$. Das zu leisten kann von keinem vernünftigen Realitätskriterium erwartet werden). Die *hidden variable*-Theorie muß also bereits jetzt jeder möglichen Ausrichtung und damit jedem möglichen Satz von orthogonalen Vektoren (x, y, z) die Werte 1 (zweimal) und 0 (einmal) zuordnen können, und zwar so, daß diese Zuordnung für einen der Vektoren unabhängig von der konkreten Wahl der anderen beiden Vektoren ist.

Das ist äquivalent zu dem Problem, die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius 1 einzufärben, so daß:

- (1) Jeder Punkt auf der Kugeloberfläche entweder rot (0) oder blau (1) ist.
- (2) Jeder Satz von drei Punkten, für die die Vektoren vom Kugelmittelpunkt zum jeweiligen Vektor zueinander paarweise orthogonal sind, genau einen roten und zwei blaue Punkte enthält.

Ein wenig anders ausgedrückt: Gesucht ist eine Abbildung, die jedem dreidimensionalen Vektor der Länge 1 eine Farbe (rot oder blau) zuweist, so daß jeder Vektor, der zu einem roten Vektor orthogonal ist, blau sein muß, und jeder Vektor der zu zwei zueinander orthogonalen blauen Vektoren orthogonal ist, rot sein muß (die Farbgebung ist natürlich völlig willkürlich). Das Kochen-Specker-Theorem besagt nun, daß eine solche Färbung/Abbildung unmöglich ist. Um das Theorem zu beweisen, beweist man zuerst einen Hilfssatz (ein Lemma), der sagt, daß unter den beiden obigen Regeln zwei Punkte, die einander näher sind (zwei Einheitsvektoren, für die der Winkel zwischen ihnen kleiner ist) als ungefähr 19.5° , dieselbe Farbe haben müssen. Seien 1 und 2 Punkte auf der Einheitskugel (mit Mittelpunkt O), die einen spitzen

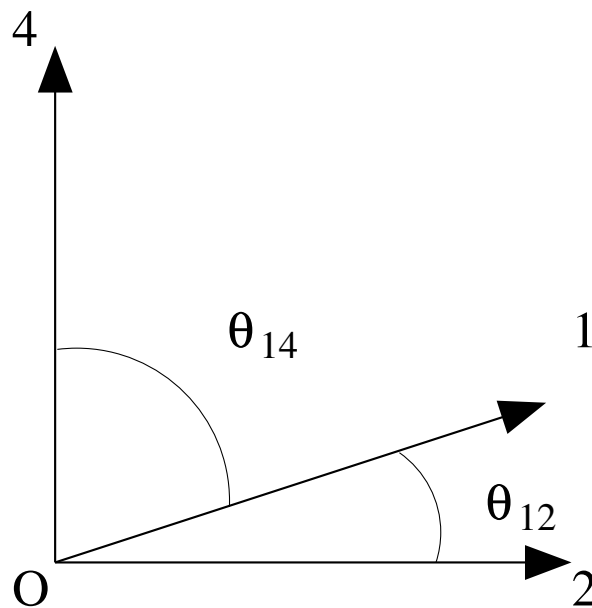


Abbildung 2: Wahl der Winkel θ_{14} und θ_{12} . O ist die Mitte der Einheitskugel.

Winkel $\theta_{12} \leq 19.5^\circ$ bilden (Abbildung 2). Der Hilfssatz sagt:

„Die Punkte 1 und 2 müssen dieselbe Farbe haben.“

Der Beweis ist indirekt: Es werde (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) angenommen, daß 1 rot und 2 blau sei. Im folgenden wird gezeigt, daß daraus und aus obigen Bedingungen (1) und (2) ein Widerspruch folgt. Zunächst wird (per Konstruktion) gezeigt, daß ein Diagramm wie in Abbildung 3, für das folgende Regeln gelten sollen:

- (1) Jeder Punkt (1-10) repräsentiert einen Einheitsvektor resp. einen Punkt auf der Einheitskugel.

- (2) Zwei Punkte, die durch eine Linie verbunden sind, repräsentieren zueinander orthogonale Vektoren.

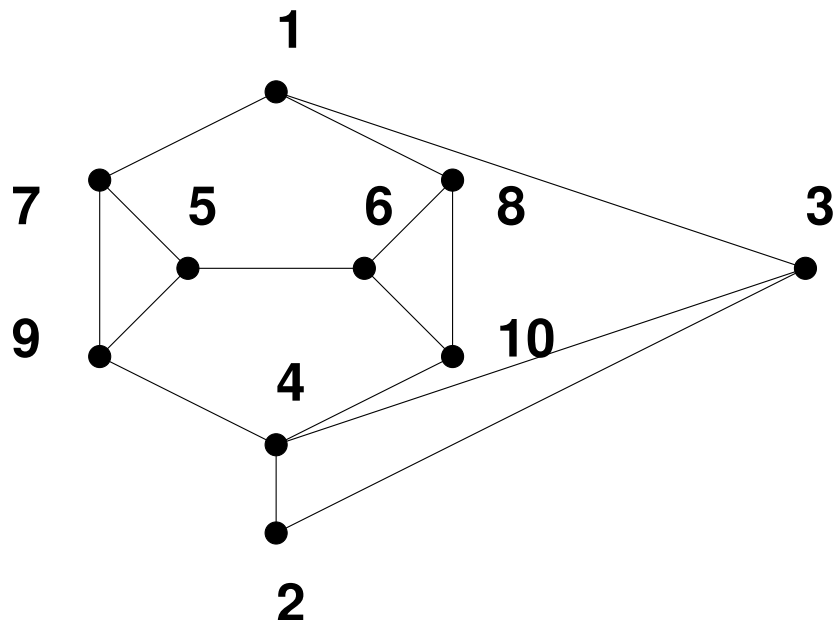


Abbildung 3: Kochen-Specker-Diagramm.

konstruierbar ist. Für dieses Diagramm gilt:

- (1) $\vec{O3}$ ist orthogonal zu $\vec{O1}$ und $\vec{O2}$. $\vec{O4}$ ist orthogonal zu $\vec{O3}$. Also muß $\vec{O4}$ in der Ebene $\vec{O1} - \vec{O2}$ liegen. Gleichzeitig ist $\vec{O4}$ orthogonal zu $\vec{O2}$. Natürlich $\vec{O1}$ so gewählt werden, daß der Winkel θ_{14} ein spitzer Winkel ist (Abbildung 2).
- (2) Sei nun $\mathbf{i} = \vec{O5}$, $\mathbf{k} = \vec{O6}$ und \mathbf{j} ein Einheitsvektor orthogonal zu beiden, so daß \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} ein Orthonormalsystem bilden.
- (3) Dann kann $\vec{O7}$, welches ja orthogonal zu \mathbf{i} ist, als Linearkombination von \mathbf{j} und \mathbf{k} geschrieben werden:

$$\vec{O7} = \frac{\mathbf{j} + x\mathbf{k}}{\sqrt{1 + x^2}}$$

und ganz analog:

$$\vec{O8} = \frac{\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{1 + y^2}}$$

mit $x, y \in \mathbf{R}$

- (4) Dann folgt daraus sofort:

$$\begin{aligned} \vec{O9} &= \frac{x\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + x^2}} \\ \vec{O10} &= \frac{y\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + x^2}} \end{aligned}$$

wie durch Einsetzen leicht zu zeigen ist.

(5) $\vec{O1}$ ist orthogonal zu $\vec{O7}$ und $\vec{O8}$. Das bedeutet:

$$\vec{O1} = \frac{xy\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + x^2 + x^2y^2}}$$

und analog

$$\vec{O4} = \frac{\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xy\mathbf{k}}{\sqrt{1 + y^2 + x^2y^2}}$$

(5) Und das wiederum heißt unmittelbar:

$$\sin \theta_{12} = \cos \theta_{14} = \vec{O1} \cdot \vec{O4} = \frac{xy}{\sqrt{(1 + x^2 + x^2y^2)(1 + y^2 + x^2y^2)}}$$

Ein wenig Algebra später sieht man: $\max \sin \theta_{12} = \frac{1}{3}$ für $x = y = \pm 1$. Das heißt: Für zwei beliebige Punkte 1 und 2 lassen sich, wenn der Winkel zwischen ihnen $\theta_{12} \leq \arcsin \frac{1}{3} \approx 19.5^\circ$ ist, *immer* acht weitere Punkte finden, so daß ein Diagramm wie in Abbildung 3 konstruierbar ist.

Sei nun 1 rot, dann müssen 3, 7 und 8 blau sein. Wenn nun 2 auch blau wäre, müßte 4 rot sein. 9 und 10 wären dann beide blau. Wenn aber 7 und 9 blau sind, so muß 5 rot sein. Wenn 8 und 10 blau sind, muß 6 rot sein. 5 und 6 sind aber orthogonal zueinander und können nicht beide rot sein. Widerspruch.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen: Wenn der Winkel zwischen 1 und 2 kleiner ist als $\arcsin \frac{1}{3}$, können die beiden Punkte nicht verschieden gefärbt sein.

Der Beweis des Kochen-Specker-Theorems benutzt nun diesen Hilfssatz, indem folgende 15 Vektoren betrachtet werden (siehe Abbildung 4): sei \mathbf{p}_0 der Nordpol der Einheitskugel, und seien \mathbf{p}_1 bis \mathbf{p}_4 Punkte auf dem Nullmeridian, die jeweils 18° auseinanderliegen (also auf $72, 54, 36$ und 18 Grad nördlicher Breite). Seien \mathbf{q}_0 bis \mathbf{q}_4 Punkte auf dem Äquator bei $0, 18, 36, 54$ und 72 Grad östlicher Länge und schließlich \mathbf{r}_0 bis \mathbf{r}_4 Punkte auf dem 90 . Grad östlicher Länge und $0, 18, 36, 54$ und 72 Grad nördlicher Breite. Dann ist mit dem oben bewiesenen Hilfssatz sofort klar, daß alle 15 Punkte *dieselbe Farbe* haben müssen. Insbesondere müssen die Punkte $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0$ und \mathbf{r}_0 , die einen Satz von drei paarweise zueinander orthogonalen Vektoren repräsentieren, alle dieselbe Farbe haben. Nach Voraussetzung muß aber genau einer von drei paarweise zueinander orthogonale Vektoren rot sein und die anderen blau. Widerspruch. Damit ist bewiesen: Die Färbung einer Kugeloberfläche nach den beiden oben gesetzten Regeln ist unmöglich.

Es ist auch möglich, die Verallgemeinerung des Diagramms aus Abbildung 3 zu konstruieren (Abbildung 5).

Das alles heißt:

- (1) In einem dreidimensionalen Raum mit nichtkommutierenden Untermengen jeweils untereinander kommutierender Operatoren (S_x^2, S_y^2, S_z^2 und $S_{x'}^2, S_{y'}^2, S_{z'}^2$ zum Beispiel) ist es unmöglich, einen Satz versteckter Variablen zu finden, so daß die Ergebnisse beliebiger Messungen durch die versteckten Variablen determiniert sind.
- (2) Da in jedem beliebigen höherdimensionalen Raum (1) für jeden beliebigen dreidimensionalen Unterraum gilt, sind *hidden-variable*-Theorien nach obigem Muster auch in jedem höherdimensionalen Hilbertraum unmöglich.

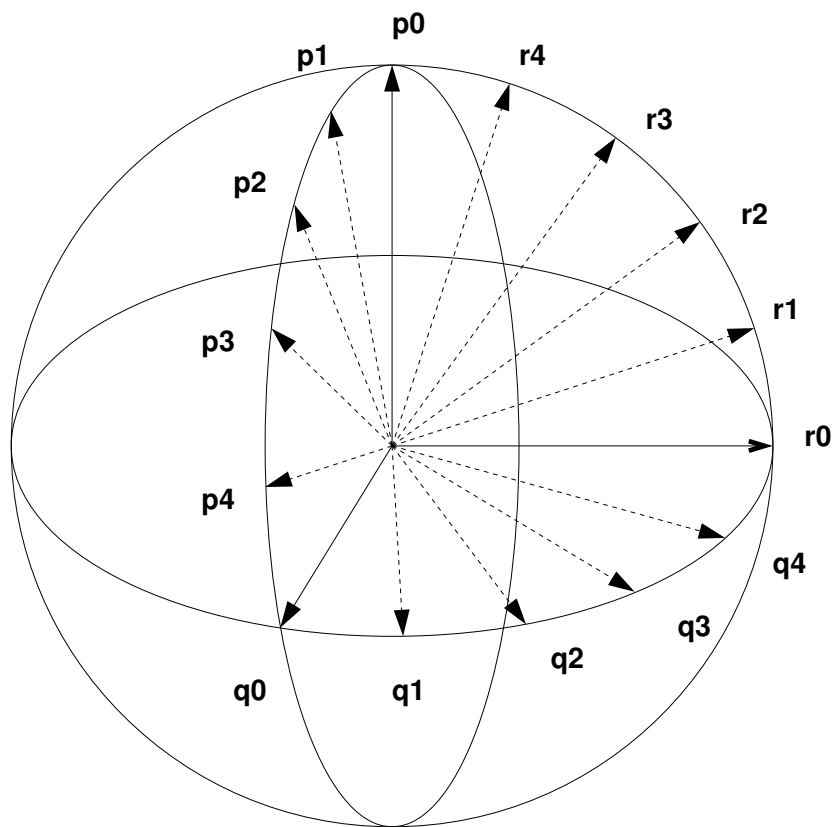


Abbildung 4: Wahl der 15 Vektoren im Beweis des Kochen-Specker-Theorems.

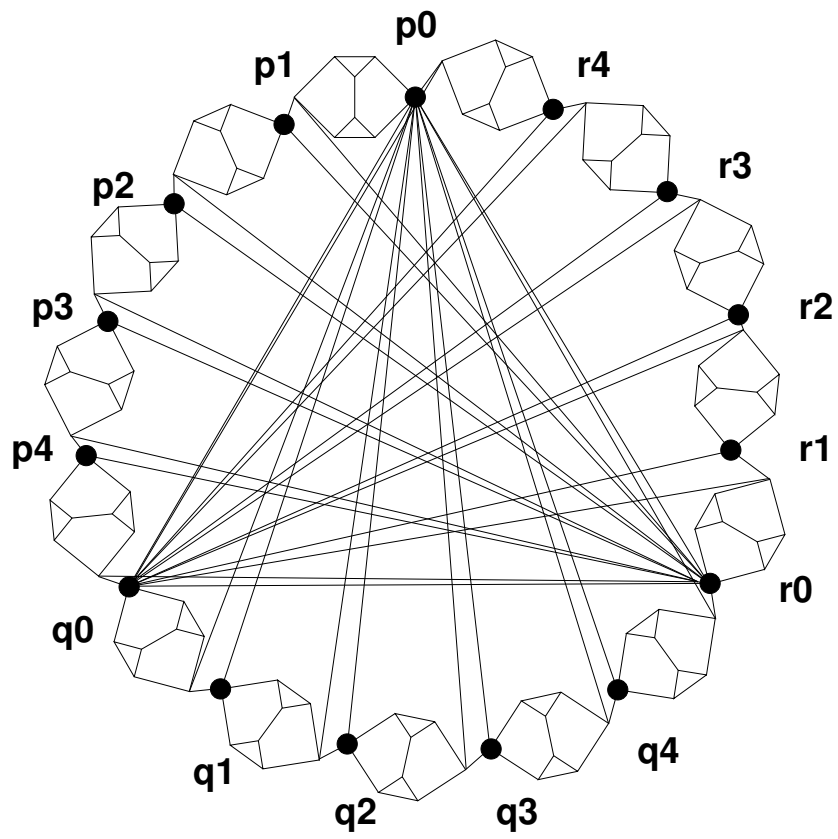


Abbildung 5: Unmögliches Kochen-Specker-Diagramm.

Das bedeutet nicht, daß jede *hidden-variable*-Theorie grundsätzlich unmöglich ist: eine *hidden-variable*-Theorie könnte zum Beispiel den Zusammenhang zwischen kommutierenden Observablen und Beliebigkeit der Messreihenfolge leugnen, und damit dem Beweis den Boden entziehen. Dieser Ansatz wird etwa in [Mer93] diskutiert und mit einer Reformulierung des Theorems erwidert (vgl. [KP94], aber auch [Mer90]). Eine solche Theorie müßte dann aber eine überzeugende Erklärung finden, warum bisher bei allen Experimenten beobachtet wurde, daß kommutierende Observablen in beliebiger Reihenfolge gemessen werden können.

Eine *hidden-variable*-Theorie könnte auch explizit nichtlokal sein [Pit89]. So könnte man in obigem Beispiel anführen, daß die Ausrichtung der Detektoren ihrerseits die versteckten Variablen beeinflusst. Dann müßte die *hidden-variable*-Theorie nicht mehr für beliebige Meßrichtungen, sondern nur für eine bestimmte gelten (was selbstverständlich möglich ist). Die Bohmsche *hidden-variable*-Theorie beispielsweise ist eine nichtlokale *hidden-variable*-Theorie: in ihr wird die Funktion Ψ durch das gesamte System und nicht nur durch lokale Gegebenheiten bestimmt. An solchen nichtlokalen Theorien sind jedoch mehrere Dinge problematisch: erstens wurden *hidden-variable*-Theorien entwickelt, um Nichtlokalitäten zu beseitigen und durch lokale Beschreibungen zu ersetzen, und zweitens ist ein Abgrenzungsproblem diesen Theorien inhärent: In [ADR82] etwa wird die Ausrichtung der Detektoren während der Flugzeit der beobachteten Photonen geändert. Das bedeutet, daß die Information über die Ausrichtung eines der Detektoren das Photon, welches auf den anderen Detektor zufliegt, mit Überlichtgeschwindigkeit erreichen müßte, was natürlich nicht geht.

Der einzige Ausweg für eine nichtlokale *hidden-variable*-Theorie zur Beschreibung des Experiments in [ADR82] bestünde darin, zu erklären, daß die Information über Zeitpunkt der Änderung sowie neuer Ausrichtung der Detektoren schon *a priori* „im System“ enthalten war. Der von [ADR82] zur Veränderung der Detektorrichtung verwendete Modulator hätte dann die versteckten Variablen *bereits vor Beginn des Experiments* in geeigneter Weise beeinflusst. Es ist natürlich leicht einzusehen, daß diese Erweiterung des Systembegriffs keine Grenzen kennen darf: wenn die Ausrichtung des Detektors etwa vom Fall einer Roulettekugel in Monte Carlo oder von der Beobachtung eines Himmelsphänomens abhängig ist, dann müssen diese ebenfalls Teil der *hidden-variable*-Theorie sein. Dann aber stellt sich die Frage, was die Theorie dann überhaupt noch beschreibt.

Aus diesen Gründen sind *hidden-variable*-Theorien in den letzten Jahren etwas aus der Mode gekommen.

8 Was ist die Bellsche Ungleichung?

Wie in Abschnitt 4 erklärt, erwies sich die Frage, die EPR aufwarfen, als theoretisch nicht entscheidbar: unter der Annahme, eine erweiterte und verbesserte Theorie als die Quantenmechanik werde alle offenen Fragen schon beantworten, läßt sich nun mal nicht konkret diskutieren. Was allerdings gezeigt werden kann, ist, welche Eigenschaften diese neue und verbesserte Theorie haben muß respektive nicht haben darf.

1964 nun formulierte John S. Bell eine experimentell verifizierbare Bedingung, die alle Theorien, die ein lokales Realitätskriterium (wie das Einsteins) beinhalten, erfüllen müssen. Er zeigte des weiteren, daß die Quantenmechanik diese Bedingung verletzt und skizzierte einen Weg zur experimentellen Realisation. So sollte ein simples Experiment die alte Frage entscheiden können. Diese Bedingung soll im folgenden dargestellt werden: der Text richtet sich im wesentlichen nach [Bel71] und [Bel75], beides abgedruckt in [Bel93].

Wie weiter oben erklärt, haben die Observablen von *hidden-variable*-Theorien immer folgende Form:

$$\bar{A} = \int A(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda$$

Dabei ist λ die versteckte Variable, $\rho(\lambda)$ das statistische Gewicht eines bestimmten Wertes von λ , und die gemessene Observable \bar{A} ist das Integral über alle Werte der versteckten Variable, was natürlich identisch ist mit einem statistischen Mittel von $A(\lambda)$ in einem (hier nicht spezifizierten) λ -Ensemble. Genaugenommen trifft das formal auch auf Theorien zu, die keine versteckten Variablen beinhalten, hier ist lediglich $\int A(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda = \bar{A} \int \rho(\lambda)d\lambda = \bar{A}$.

Insbesondere haben natürlich auch alle *lokal realistischen hidden-variable*-Theorien, also alle Theorien, bei denen alle Observablen nur von Variablen abhängen, die am selben Ort realisiert sind, diese Eigenschaft.

Es werde nun folgendes Experiment betrachtet: von einer Quelle Q werden zwei Photonen, deren Polarisationsrichtungen zunächst unbestimmt, aber zueinander orthogonal sind, in entgegengesetzte Richtung emittiert. Beide Photonen treffen nun auf je einen Polarisationsfilter und werden nach Passieren des Filters von je einem Detektor registriert (oder auch nicht). Seien die das Experiment beschreibenden Observablen definiert durch: $A = +1$ wenn der erste Detektor ein Photon registriert und -1 sonst, ebenso $B = +1$ wenn der zweite Detektor ein Photon registriert und -1 sonst. Es seien nun beide Polarisationsfilter um Winkel α und β (relativ zu einer beliebigen aber vorher festgelegten Richtung) drehbar.

In *hidden-variable*-Theorien sind nun die Observablen A und B nicht nur durch die entsprechenden quantenmechanischen Operatoren bestimmt, sondern auch durch den Satz versteckter Variablen λ . Also ist der Mittelwert vieler Messungen von $A(\alpha, \lambda)$, wie oben begründet, gegeben durch:

$$\bar{A} = \int A(\alpha, \beta, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda$$

und analog für \bar{B} . Einsteins Realitätskriterium nun verlangt die Abwesenheit einer *spooky action at a distance*, in anderen Worten also die Unabhängigkeit A s von am zweitewn Detektor beobachtbaren Größen. Einstein erlaubt, daß A von α und λ abhängen darf, verlangt aber, daß die Einstellung des zweiten Polfilters (also β) bei der Messung von A am ersten Detektor keine Rolle spielt. Also:

$$\bar{A} = \int A(\alpha, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda$$

und für die Korrelationsfunktion $P(\alpha, \beta) \equiv \int A(\alpha, \beta, \lambda)B(\alpha, \beta, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda$ analog

$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta) &= \int A(\alpha, \beta, \lambda)B(\alpha, \beta, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \\ &= \int A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \end{aligned}$$

Das muß für *jede* lokal realistische Theorie gelten. Wenn nun der Mittelwert von P bei zwei verschiedenen Einstellungen des zweiten Polarisationsfilters, nämlich β und β' gemessen wird, so muß demnach gelten:

$$P(\alpha, \beta) - P(\alpha, \beta') = \int A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda - \int A(\alpha, \lambda)B(\beta', \lambda)\rho(\lambda)d\lambda$$

Wird nun zu dieser Gleichung 0 addiert

$$\begin{aligned} 0 &= \pm \int A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda)A(\alpha', \lambda)B(\beta', \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \\ &\mp \int A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda)A(\alpha', \lambda)B(\beta', \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \end{aligned}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta) - P(\alpha, \beta') &= \int A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda) [1 \pm A(\alpha', \lambda)B(\beta', \lambda)] \rho(\lambda)d\lambda \\ &\quad - \int A(\alpha, \lambda)B(\beta', \lambda) [1 \pm A(\alpha', \lambda)B(\beta, \lambda)] \rho(\lambda)d\lambda \end{aligned}$$

Natürlich folgt aus $A, B = \pm 1$ sofort $|AB| \leq 1$ und das heißt:

$$\begin{aligned} |P(\alpha, \beta) - P(\alpha, \beta')| &\leq \left| \int A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda) [1 \pm A(\alpha', \lambda)B(\beta', \lambda)] \rho(\lambda)d\lambda \right| \\ &\quad + \left| \int A(\alpha, \lambda)B(\beta', \lambda) [1 \pm A(\alpha', \lambda)B(\beta, \lambda)] \rho(\lambda)d\lambda \right| \\ &\leq \int |A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda) [1 \pm A(\alpha', \lambda)B(\beta', \lambda)] \rho(\lambda)| d\lambda \\ &\quad + \int |A(\alpha, \lambda)B(\beta', \lambda) [1 \pm A(\alpha', \lambda)B(\beta, \lambda)] \rho(\lambda)| d\lambda \\ &= \int |A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda)| [1 \pm A(\alpha', \lambda)B(\beta', \lambda)] \rho(\lambda)d\lambda \\ &\quad + \int |A(\alpha, \lambda)B(\beta', \lambda)| [1 \pm A(\alpha', \lambda)B(\beta, \lambda)] \rho(\lambda)d\lambda \end{aligned}$$

da sowohl $\rho(\lambda)$ als auch die Terme in eckigen Klammern nicht negativ werden können. Mit $|A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda)| \leq 1$ und $|A(\alpha, \lambda)B(\beta', \lambda)| \leq 1$ gilt dann:

$$\begin{aligned} |P(\alpha, \beta) - P(\alpha, \beta')| &\leq \int [1 \pm A(\alpha', \lambda)B(\beta', \lambda)] \rho(\lambda)d\lambda \\ &\quad + \int [1 \pm A(\alpha', \lambda)B(\beta, \lambda)] \rho(\lambda)d\lambda \\ &\leq 2 \pm \left[\int A(\alpha', \lambda)B(\beta', \lambda)\rho(\lambda)d\lambda + \int A(\alpha', \lambda)B(\beta, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \right] \\ &\leq 2 \pm [P(\alpha', \beta') + P(\alpha', \beta)] \\ &\leq 2 - |P(\alpha', \beta') + P(\alpha', \beta)| \end{aligned}$$

oder anders formuliert:

$$|P(\alpha, \beta) - P(\alpha, \beta')| + |P(\alpha', \beta') + P(\alpha', \beta)| - 2 \leq 0 \quad (2)$$

Ungleichung 2 ist nicht die einzige, aber die bekannteste Formulierung der *Bellschen Ungleichung*. Sie muß von jeder Theorie erfüllt werden, die ein lokales Realitätsprinzip besitzt, also insbesondere von jeder lokalen *hidden-variable*-Theorie. Dabei sind die in der Bellschen Ungleichung vorkommenden Größen nach ein paar Modifikationen direkt experimentell zugänglich, wie in Abschnitt 10 näher erläutert. Somit ist die Frage, ob unsere Welt mit einem lokalen Realitätskonzept vollständig beschrieben werden kann, experimentell entscheidbar.

9 Was sagt die Quantenmechanik dazu?

Quantenmechanisch gesehen ist die Wellenfunktion von zwei zueinander orthogonal polarisierten Photonen (siehe Abbildung 1) gegeben durch [Bel93]:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle \left|\frac{\pi}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \left|\frac{\pi}{2}\right\rangle |0\rangle$$

wobei die Richtung „0“ in $|0\rangle$ nicht festgelegt ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden Photonen zwei Polarisationsfilter passieren, die auf Winkel α und β eingestellt sind (wie im folgenden gezeigt wird, ist lediglich die Größe $\alpha - \beta$ relevant, also kommt es auch hier nicht auf eine spezifische Festlegung der absoluten Orientierung an), ist dann

$$\begin{aligned} p(\text{yes, yes}) &= \frac{1}{2} \left| \langle \alpha | 0 \rangle \langle \beta | \frac{\pi}{2} \rangle - \langle \alpha | \frac{\pi}{2} \rangle \langle \beta | 0 \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} |\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta|^2 \\ &= \frac{1}{2} |\sin(\alpha - \beta)|^2 \end{aligned}$$

und völlig analog:

$$\begin{aligned} p(\text{yes, no}) &= \frac{1}{2} |\cos(\alpha - \beta)|^2 \\ p(\text{no, yes}) &= \frac{1}{2} |\cos(\alpha - \beta)|^2 \\ p(\text{no, no}) &= \frac{1}{2} |\sin(\alpha - \beta)|^2 \end{aligned}$$

wobei die Quantenausbeute der Detektoren hier zunächst genauso unberücksichtigt bleibt, wie die Transmissionskoeffizienten der Polarisationsfilter und andere experimentelle Parameter. Die Korrelationsfunktion $P(\alpha, \beta)$ ist nun natürlich

$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta) &= p(\text{yes, yes}) + p(\text{no, no}) - p(\text{yes, no}) - p(\text{no, yes}) \\ &= \sin^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha - \beta) \\ &= -\cos 2(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

wie leicht zu sehen ist. Damit ist die linke Seite der Bellschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} &|P(\alpha, \beta) - P(\alpha, \beta')| + |P(\alpha', \beta') + P(\alpha', \beta)| - 2 \\ &= |\cos 2(\alpha - \beta) - \cos 2(\alpha - \beta')| + |\cos 2(\alpha' - \beta') + \cos 2(\alpha' - \beta)| - 2 \end{aligned}$$

Werden nun α , α' , β und β' geeignet gewählt, etwa

$$\alpha = 0, \quad \alpha' = \frac{\pi}{4}, \quad \beta = \frac{\pi}{8}, \quad \beta' = \frac{3\pi}{8}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} &|P(\alpha, \beta) - P(\alpha, \beta')| + |P(\alpha', \beta') + P(\alpha', \beta)| - 2 \\ &= |\cos 2(\alpha - \beta) - \cos 2(\alpha - \beta')| + |\cos 2(\alpha' - \beta') + \cos 2(\alpha' - \beta)| - 2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \\ &= 2(\sqrt{2} - 1) = 0.828 \dots \not\leq 0 \end{aligned}$$

Die Quantenmechanik verletzt die Bellsche Ungleichung. Sie ist keine lokal realistische Theorie.

10 Was ist das Aspect-Experiment?

1981 veröffentlichten [AGR81] einen Artikel über eine experimentelle Überprüfung der Bellschen Ungleichung (vgl. [AGR82, ADR82]). Sie benutzten dabei eine Reformulierung derselben, die bereits von [CHSH69] ausgearbeitet worden war und in der nicht Wahrscheinlichkeiten, sondern wirklich die Zählraten von Photodetektoren verwendet werden. Im Experiment werden von einer Kr-Laser-gepumpten Ca-Ionen-Quelle zwei Photonen in entgegengesetzte Richtung emittiert, deren Polarisationsrichtung korreliert ist. Diese Photonen treffen nun auf je einen drehbaren Polarisationsfilter und dahinter auf je einen Photodetektor. Für diesen Aufbau lautet die verallgemeinerte Bellsche Ungleichung:

$$-1 \leq S = \frac{1}{R_0} \left[R(\vec{a}, \vec{b}) - R(\vec{a}, \vec{b}') + R(\vec{a}', \vec{b}) + R(\vec{a}', \vec{b}') - R_1(\vec{a}') - R_2(\vec{b}) \leq 0 \right] \quad (3)$$

Hier sind die $R(\vec{a}, \vec{b})$ einfach die Koinzidenzraten beider Photomultiplier (also die Häufigkeit (in 1/sec) mit der beide Detektoren gleichzeitig je ein Photon detektieren), wenn die beiden Polarisationsfilter auf die Winkel \vec{a} und \vec{b} eingestellt sind. $R_1(\vec{a}')$ ist die Koinzidenzrate, wenn der erste Polfilter auf den Winkel \vec{a}' eingestellt und der andere Polfilter entfernt wurde, $R_2(\vec{b})$ analog die Koinzidenzrate, wenn der erste Polfilter entfernt und der zweite auf den Winkel \vec{b} eingestellt wurde. R_0 schließlich ist die Koinzidenzrate ohne beide Filter. Die genaue Herleitung von Gleichung (3) ist in [CHSH69] zu finden.

Das Experiment wurde nun folgendermaßen durchgeführt: Zunächst wurden die Koinzidenzraten ohne Polfilter, R_0 , und mit je einem Polfilter gemessen, anschließend mit beiden Polfiltern in den jeweils gewählten Einstellungen, und schließlich wurden daraus die Größen S und δ bestimmt, mit

$$\delta = \frac{|R(22.5^\circ) - R(67.5^\circ)|}{R_0} - \frac{1}{4}$$

wobei $R(22.5^\circ)$ und $R(67.5^\circ)$ Abkürzungen für die Winkeleinstellungen in Abbildung 6 sind, und die entsprechende Bellsche Ungleichung für δ lautet:

$$\delta \leq 0$$

Die Koinzidenzraten R wurden nun jeweils über mehrere Meßperioden von jeweils 100 Sekunden gemessen (dabei wurde durch häufige Messungen von R_0 verifiziert, daß die Photonenquelle eine stabile Emissionsrate hatte), und schließlich einfach in die Gleichungen für S und δ eingesetzt. Da jeweils die Ergebnisse aus mehreren Meßperioden zur Verfügung standen, konnte mit Standardmethoden auch jeweils eine Angabe über die statistische Signifikanz der Ergebnisse gemacht werden.

[AGR81] maßen:

$$S_{\text{exp}} = 0.126 \pm 0.014 \quad \text{und} \quad \delta_{\text{exp}} = 5.72 \cdot 10^{-2} \pm 0.43 \cdot 10^{-2}$$

In einer lokal realistischen Welt sollten, wie oben dargelegt, beide Zahlen kleiner als null sein. Beide Ungleichungen werden jedoch vom Experiment um 13 resp. 9 Standardabweichungen

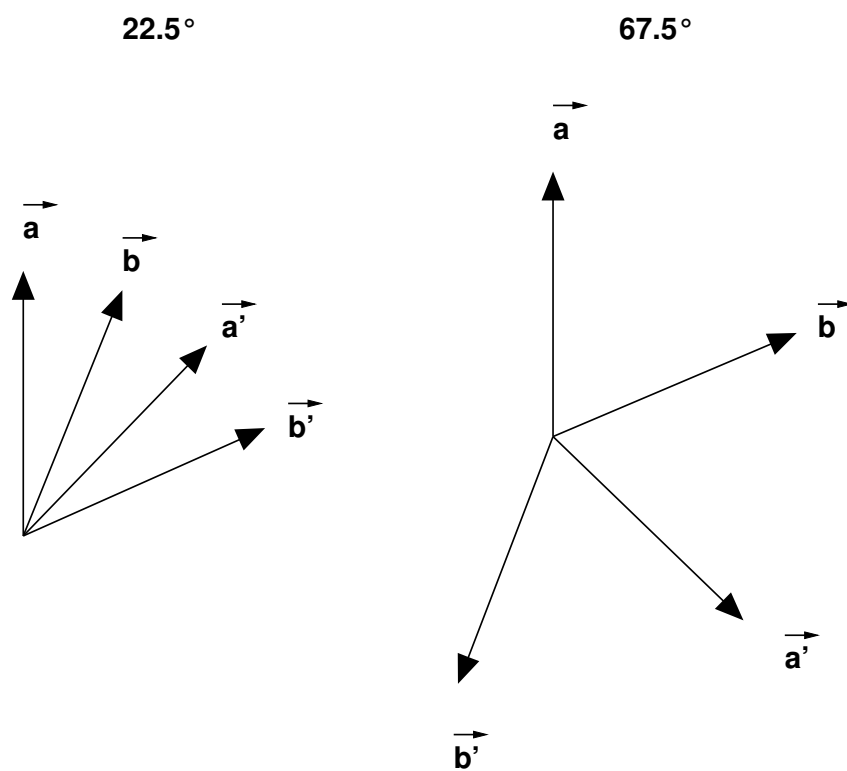


Abbildung 6: Zwei Sätze von Winkeleinstellungen, für die die Quantenmechanik eine maximale Verletzung der Bellschen Ungleichung vorhersagt.

verletzt. Die Quantenmechanik hingegen sagt für die beiden Größen folgende Werte voraus (die detaillierten Rechnungen sind ebenfalls in [AGR81] und [CHSH69]) zu finden:

$$S_{\text{QM}} = 0.118 \pm 0.005 \quad \text{und} \quad \delta_{\text{QM}} = 5.8 \cdot 10^{-2} \pm 0.2 \cdot 10^{-2}$$

In die quantenmechanischen Rechnungen gehen Parameter der Meßapparatur ein, deren Bestimmung fehlerbehaftet ist, deshalb sind die Vorhersagen ebenfalls mit einem statistischen Fehler behaftet. Die Schlußfolgerung der Autoren lautet:

„[O]ur results, in excellent agreement with quantum mechanics predictions, are to a high statistical accuracy a strong evidence against the whole class of realistic local theories.“

[AGR81]

Ähnliche Experimente wurden an diesem und an anderen Systemen mehrfach durchgeführt. Eine hervorragende Zusammenfassung gibt [DK88] und eine ausgezeichnete Diskussion der ganzen Angelegenheit gibt [Pri81].

Literatur

- [ADR82] A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger, Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers, *Phys. Rev. Lett.* 49 1804 (1982)
- [AGR81] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, Experimental Test of Realistic Local Theories via Bell's Theorem, *Phys. Rev. Lett.* 47 460 (1981)
- [AGR82] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*: A New Violation of Bell's Inequalities, *Phys. Rev. Lett.* 49 91 (1982)
- [Bel71] J. S. Bell, Introduction to the hidden-variable question, in *Foundations of quantum mechanics*, Proceedings of the International School of Physics 'Enrico Fermi', course II, 171–181, Academic Press, New York (1971)
- [Bel75] J. S. Bell, The theory of local beables, Tech. Rep. TH-2053-CERN, CERN (25. Juli 1975)
- [Bel93] J. S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1993)
- [Boh35] N. Bohr, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?, *Phys. Rev.* 48 696 (1935)
- [Boh51] D. Bohm, *Quantum Theory*, chap. 22, 611–623, Prentice-Hall, Eaglewood Cliffs (1951)
- [CHSH69] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony et al., Proposed experiment to test local hidden-variable theories, *Phys. Rev. Lett.* 23 880 (1969)

- [DK88] A. J. Duncan and H. Kleinpoppen, The Experimental Investigation of the Einstein-Podolsky-Rosen Question and Bell's Inequality, in Quantum Mechanics versus Local Realism. The Einstein-Podolsky-Rosen-Paradox (F. Selleri, ed.), Physics of Atoms and Molecules, chap. 7, 175–218, Plenum, New York (1988)
- [EPR35] A. Einstein, B. Podolski and N. Rosen, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?, Phys. Rev. 47 777 (1935)
- [FC72] S. J. Freedman and J. F. Clauser, Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories, Phys. Rev. Lett. 28 938 (1972)
- [Hol93] P. R. Holland, The Quantum Theory of Motion, Cambridge University Press, Cambridge (1993)
- [Hoo75] C. A. Hooker, ed., The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics, vol. 1, Reidel, Dordrecht (1975)
- [KP94] M. Kernaghan and A. Peres, Kochen-Specker theorem for 8-dimensional space, quant-ph/9412006 auf <http://xxx.lanl.gov> (1994)
- [KS67] S. Kochen and E. P. Specker, The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics, J. Math. Mech. 17 59 (1967), zitiert nach: [Hoo75]
- [Mer90] N. D. Mermin, Simple Unified Form for the Major No-Hidden-Variables Theorems, Phys. Rev. Lett. 65 3373 (1990)
- [Mer93] N. D. Mermin, Hidden variables and the two theorems of John Bell, Rev. Mod. Phys. 65 803 (1993)
- [Pit89] I. Pitowsky, Quantum probability - quantum logic, vol. 321 of Lecture notes in physics, Springer, Berlin (1989)
- [PMH84] H. Primas and U. Müller-Herold, Elementare Quantenchemie, Teubner, Stuttgart (1984)
- [Pop84] K. Popper, Objektive Erkenntnis: Ein evolutionärer Entwurf, 4th edn., Hoffmann & Campe, Hamburg (1984)
- [Pri81] H. Primas, Chemistry, Quantum Mechanics and Reductionism. Perspectives in Theoretical Chemistry, vol. 24 of Lecture Notes in Chemistry, Springer, Berlin (1981)
- [Red87] M. Redhead, Incompleteness, nonlocality, and realism: a prolegomenon to the philosophy of quantum mechanics, Clarendon Press, Oxford (1987)