

Felder um eine leitende Kugelschale

Hendrik van Hees

07. August 2004

Im folgenden behandeln wir eines der wenigen geschlossen lösbaren Influenzprobleme der Elektrostatik, und zwar sei eine ideal leitende Kugelschale vom Radius R betrachtet, in deren Innerem sich eine ruhende Punktladung Q befinde. Wir nehmen weiter an, die Kugel selbst sei ungeladen. Wir wählen den Kugelmittelpunkt zum Ursprung unseres Koordinatensystems. Wir bedienen uns des in der Teilchenphysik üblichen Heaviside-Lorentzschen Maßsystem, das die dimensionellen Vorteile des Gaußschen Maßsystems mit der Rationalität des SI vereinigt. In diesem Maßsystem lauten die Maxwell'schen Feldgleichungen für elektrostatische Situationen

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \rho, \quad (1)$$

wobei ρ die zeitunabhängige Ladungsverteilung im Raume bezeichnet. Wir haben zugleich angenommen, daß wir uns im Vakuum befinden, die Dielektrizitätszahl also überall $\epsilon = 1$ ist. Die erste Gleichung wird nach dem Lemma von Poincaré durch den Ansatz

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi \quad (2)$$

erfüllt, und die zweite Gleichung liefert die **Poissongleichung**

$$\Delta \phi = -\rho. \quad (3)$$

Unser Problem wird dann durch die Vorgabe der Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{x}) = Q\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (4)$$

mit $|\vec{x}_0| < R$ sowie die Randbedingung

$$\phi|_{K_R} = \text{const.} \quad (5)$$

beschrieben. Da der Wert des Potentials ohnehin nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, können wir $\phi|_{K_R} = 0$ wählen.

Wir müssen nun die folgende Fallunterscheidung vornehmen: Entweder $\vec{x}_0 = 0$ oder $\vec{x}_0 \neq 0$. Im ersten Falle wird das Problem im Innenraume offenbar einfach durch das Coulombpotential gelöst. Die Kugelschale spielt dann offenbar gar keine Rolle für das Feld. Das ist freilich auf die Symmetrie des Problems zurückzuführen: Es gibt eben keine andere vollständig radialsymmetrischen Lösungen der Poissongleichung als $\phi = \text{const}$ und $\phi \propto 1/|\vec{x}|$, d.h. in diesem Falle muß also für $x := |\vec{x}| < R$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi|\vec{x}|} - \frac{Q}{4\pi R} \quad (6)$$

sein.

Auch im Außenraume muß nun das Potential genau diese Gestalt besitzen, denn nach Annahme ist ja die Kugelfläche ungeladen, und nach dem Gaußschen Gesetz muß also im Außenraume das Coulombsche Gesetz mit der im Inneren befindlichen Ladung gelten. Die Kugel besitzt in diesem Falle also gar keine Auswirkung auf das Feld.

Wenden wir uns nun dem weitaus interessanteren zweiten Fall zu, d.h. sei $\vec{x}_0 \neq 0$. Dann müssen wir das Problem in Innen- und Außenraumproblem trennen. Im Innenraum herrscht ein Feld, das zum einen durch die eingebrachte Ladung Q und die durch sie bewirkte Influenzladung der Kugelschale bewirkt wird. I.a. ist dies ein äußerst kniffliges Problem für die Potentialtheorie. Wegen der Kugelsymmetrie des Leiters läßt es sich aber in unserem Falle mit der **Methode der virtuellen Ladungen** leicht lösen.

Dieser Methode zufolge dürfen wir im Außenraum beliebige fiktive Ladungsverteilungen (die virtuellen Ladungen eben) anordnen, solange wir nur den Innenraum betrachten. Die Idee ist nun, diese so zu wählen, daß die Randbedingung (5) erfüllt wird, wenn man das durch die echte Ladung Q und die virtuellen Ladungen hervorgerufene Potential bestimmt als wäre die Kugelschale gar nicht vorhanden.

In unserem Falle der Kugel ist die virtuelle Ladung einfach durch eine Punktladung auf der durch \vec{x}_0 vorgegebenen Radiallinie gegeben, wie wir sogleich beweisen werden. In diesem Falle nennt man sie auch **Spiegelladung**. Um unser Problem etwas bequemer lösen zu können, wollen wir sphärische Koordinaten einführen, wobei wir \vec{x}_0 in die Polarrichtung legen wollen. Dann lautet unser Ansatz für das **Feld im Inneren der Kugelschale**

$$\phi(\vec{x}) = \frac{Q}{\sqrt{x^2 + x_0^2 - 2xx_0 \cos \vartheta}} + \frac{Q'}{\sqrt{x^2 + y_0^2 - 2xy_0 \cos \vartheta}}. \quad (7)$$

Dabei ist \vec{y}_0 der Ort der virtuellen Ladung. Damit unsere Gleichung (4) im Innenraume erfüllt wird, muß $y_0 \geq R$ sein. Den Ansatz (7) in die Randbedingung (5) eingesetzt ergibt nach einigen Umformungen

$$Q^2(R^2 + y_0^2 - 2Ry_0 \cos \vartheta) = Q'^2(R^2 + x_0^2 - 2Rx_0 \cos \vartheta). \quad (8)$$

Dies kann nur identisch erfüllt sein, wenn die Koeffizienten von $\cos \vartheta$ und die bzgl. des Winkels konstanten Terme auf beiden Seiten gleich sind. Diese beiden Gleichungen lassen sich unter der Nebenbedingung, daß $y_0 > 0$ sein muß, durch

$$y_0 = \frac{R^2}{x_0}, \quad Q' = -Q \frac{R}{x_0} \quad (9)$$

erfüllen. Das relative Vorzeichen zwischen Q' und Q ergibt sich dabei durch Überprüfen der Erfüllung der Randbedingung durch Einsetzen in (7). Man beachte, daß sich diese Unbestimmtheit des Vorzeichens allein daraus ergibt, daß bei der Aufstellung von (8) beide Seiten der Gleichungen quadriert wurden, was keine Äquivalenzumformung ist, sondern fiktive Zusatzlösungen erzeugt.

Setzen wir schließlich die Lösung (9) in den Ansatz (7) ein, erhalten wir

$$\phi(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + x_0^2 - 2xx_0 \cos \vartheta}} - \frac{R}{\sqrt{R^4 + x^2 x_0^2 - 2R^2 x x_0 \cos \vartheta}} \right), \quad x \leq R. \quad (10)$$

Das elektrische Feld im Innenraum ergibt sich daraus durch Bilden des Gradienten gemäß (2):

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{x - x_0 \cos \vartheta}{N_1} + \frac{Rx_0(R^2 \cos \vartheta - xx_0)}{N_2} \right], \\
E_\vartheta &= \frac{Qx_0}{4\pi} \left[\frac{1}{N_1} - \frac{R^3}{N_2} \right] \sin \vartheta, \\
E_\varphi &= 0 \\
\text{mit } N_1 &= (x^2 + x_0^2 - 2xx_0 \cos \vartheta)^{3/2}, \\
N_2 &= (R^4 + x^2x_0^2 - 2R^2xx_0 \cos \vartheta)^{3/2}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Wenden wir uns nun der Lösung im **Außenraume** zu: Hier haben wir **keine Ladungen** vorliegen. Wir dürfen ja nicht die Spiegelladung mit einer realen Ladung verwechseln, die wirklich an der soeben ausgerechneten Stelle säße! Wir bemerken weiter, daß diese Form freilich auch für den Spezialfall der Punktladung im Mittelpunkt der Kugel, also $x_0 = 0$ korrekt ist, wie der Vergleich mit (6) zeigt. Gemäß (3) suchen wir also nun noch eine Lösung der Laplacegleichung $\Delta\phi = 0$ mit unserer Kugel als Äquipotentialfläche. Wie beim Fall $x_0 = 0$ muß also im Außenraum wieder das Coulombgesetz gelten, so als säße die Punktladung im Mittelpunkt der Kugel:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi|\vec{x}|} - \frac{Q}{4\pi R}. \tag{12}$$

Die influenzierte Oberflächenladungsdichte ist durch

$$\begin{aligned}
\sigma &= \vec{e}_r \left[\vec{E}(r, \vartheta)|_{r \rightarrow R+0^+} - \vec{E}(r, \vartheta)|_{r \rightarrow R-0^+} \right] \\
&= \frac{Q}{4\pi R^2} \left[1 - \frac{R(R^2 - x_0^2)}{(R^2 + x_0^2 - 2Rx_0 \cos \vartheta)^{3/2}} \right]
\end{aligned} \tag{13}$$

Daß dies die Forderung des Verschwindens der Gesamtladung auf der Kugelfläche erfüllt, erkennt man daraus, daß § sowohl für die Innen- als auch die Außenraumlösung die im Inneren der Kugel gelegene Gesamtladung Q ist, so daß das Flächenintegral von \vec{E} über die Kugeloberflächen mit den Radien $r = R-0^+$ und $r = R+0^+$ nach dem Gaußschen Gesetz beidemale Q ergibt. Damit verschwindet aber in der Tat das Integral von σ über die Kugeloberfläche. Das rechnet man freilich mühelos auch durch direkte Rechnung nach.

Freilich kann man aus der hier gegebenen Lösung beliebige neue Lösungen generieren, indem man auf die Kugelschale eine beliebige homogen verteilte Zusatzladung aufbringt. Dann ändert sich freilich an der Innenraumlösung gar nichts, während im Außenraum zusätzlich ein Coulombfeld zu superponieren wäre, das gerade dieser aufgebrauchten Ladung entspricht.

Betrachten wir nun noch den Fall, daß sich die **Punktladung im Äußeren der Kugel** findet. Wir behalten alle Bezeichnungen der vorigen Rechnung bei. Die Spiegelladungsmethode ist nun freilich im Außenraume zu verwenden, und die virtuelle Ladung liegt nun im Inneren der Kugel. Die Außenraumlösung besitzt nun die Gestalt (10), ergänzt um das Coulombfeld einer zunächst unbestimmten homogenen Oberflächenladung auf der Kugel, die wir uns freilich

auch durch eine weitere im Kugelsprung sitzende Spiegelladung ersetzt denken dürfen:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) = & \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + x_0^2 - 2xx_0 \cos \vartheta}} - \frac{R}{\sqrt{R^4 + x^2x_0^2 - 2R^2xx_0 \cos \vartheta}} \right) \\ & + \frac{Q''}{4\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right), \quad x \geq R. \end{aligned} \quad (14)$$

Diese Ladung werden wir sogleich noch aus der Bedingung zu ermitteln haben, daß die auf der Kugeloberfläche sitzende Gesamtladung zu verschwinden hat.

Dazu benötigen wir aber die Innenraumlösung. Hier führt wieder das Symmetrieargument, das wir oben für den Außenraum angewandt haben, zum Ziele: Im Inneren der Kugel befindet sich voraussetzungsgemäß keine Ladung, so daß wir eine Lösung der Laplacegleichung mit der Kugel als Äquipotentialfläche suchen. Wie oben gezeigt, kann das nur eine Konstante sein, d.h. im Inneren haben wir also

$$\phi(\vec{x}) = 0, \quad x \leq R. \quad (15)$$

Im Inneren verschwindet also das elektrische Feld. Da die Oberflächenladungsdichte durch den Sprung der Normalkomponente des elektrischen Feldes bestimmt ist, ist die auf der Kugeloberfläche befindliche Gesamtladung also durch das Flächenintegral von \vec{E} entlang der Kugel mit dem Außenraumfeld $\vec{E}(\vec{x})|_{|\vec{x}| \rightarrow R+0^+}$ gegeben. Dieses Integral müssen wir aufgrund des Gaußschen Satzes jedoch nicht berechnen, denn es ist ja durch die Spiegelladungen Q' und Q'' bestimmt. Es ist also $Q'' = -Q'$ zu setzen, und das Problem ist gelöst:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) = & \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + x_0^2 - 2xx_0 \cos \vartheta}} - \frac{R}{\sqrt{R^4 + x^2x_0^2 - 2R^2xx_0 \cos \vartheta}} \right) \\ & + \frac{QR}{4\pi x_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right), \quad x \geq R. \end{aligned} \quad (16)$$

Die auf der Kugeloberfläche influenzierte Ladungsverteilung ist hier

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi R x_0} \left[1 + \frac{x_0(R^2 - x_0^2)}{(R^2 + x_0^2 - 2R x_0 \cos \vartheta)^{3/2}} \right]. \quad (17)$$