

Hohlraumstrahlung

Hendrik van Hees

9. August 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Konventionen	2
2	Quantisierung des elektromagnetischen Feldes	2
3	Quantenstatistik	6
4	Der kovariante Statistische Operator	8
5	Das Spektrum	12
A	Berechnung des “Planck-Integrals”	14

1 Einleitung

Die Untersuchung der Hohlraumstrahlung, also der elektromagnetischen Strahlung, die sich im thermodynamischen Gleichgewicht in einem Hohlraum ergibt, hat sich für die ganze moderne Physik als außerordentlich wichtig erwiesen. Plancks Lösung des Problems, das mit Kirchhoffs Untersuchungen zur Universalität dieser Strahlung seinen Ausgang im 19. Jh. genommen hatte, gehört zu den elegantesten und weitreichendsten in der Physik überhaupt.

Es gehörte einerseits zu den ersten Rechnungen der relativistischen Statistik überhaupt (freilich ohne, daß dies im Jahre 1899 irgendjemand bewußt gewesen ist), andererseits aber zeigte sich drastisch das Versagen der klassischen Physik, und es deutete sich jener Paradigmenwechsel an, der schließlich in der Entwicklung der Quantentheorie in den ausgehenden 20er Jahren seinen Abschluß gefunden hat.

Hier soll nun eine Herleitung im Rahmen der Quantenelektrodynamik gegeben werden. Die Rechnung gehört zu den wenigen Beispielen der Quantenfeldtheorie, die ein direkt meßbares Phänomen exakt zu berechnen gestatten.

Es geht mir primär um die Klärung der Frage, wie sich das Plancksche Strahlungsgesetz kovariant formulieren läßt. Dabei mache ich von der einfachst möglichen Form der Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes Gebrauch, nämlich durch totale Einschränkung

der Eichfreiheit durch Wahl der Strahlungseichung, alle unphysikalischen Freiheitsgrade zu eliminieren. Die relativistische Kovarianz und Eichinvarianz läßt sich dann zwar nicht mehr unmittelbar ersehen, ist aber implizit klar, weil sich alles durch den relativistisch kovarianten Faradaytensor ausdrücken läßt.

Wesentlicher wird die Wahl des statistischen Operators für die kovariante Formulierung. Wie wir sehen werden, erweist es sich dabei als wichtig, daß Energie- und Impulserwartungswert festgelegt werden.

Der Artikel ist wie folgt gegliedert: Wir werden zunächst ausführlich die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes besprechen. Nach Darstellung von Hamilton- und Impulsoperator wenden wir uns sogleich der Berechnung der Planckschen Verteilung bei beliebig gehaltenem Gesamtimpuls des Systems zu. Dazu bestimmen wir den dazu gehörigen Statistischen Operator des thermodynamischen Gleichgewichts aus dem Jaynesschen Prinzip vom geringsten Vorurteil (also dem Entropieprinzip). Abschließend betrachten wir die Frage, wie sich durch Spektroskopieren der Hohlraumstrahlung das Ruhssystem derselben bestimmen läßt.

1.1 Konventionen

Im folgenden verwenden wir das natürliche Einheitensystem mit $\hbar = c = k_B = 1$, so daß nur noch eine Einheit zu wählen ist, wobei wir uns für das eV als Energieeinheit entscheiden.

Wir wählen die metrische Fundamentalform des Minkowskiraums in der Bjorken-Drell-Konvention $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Die Maxwellgleichungen werden in rationalisierten Heaviside-Lorentz-Einheiten (natürlich entsprechend der obigen Wahl mit $c = 1$ geschrieben, in denen das Coulombgesetz durch das Potential

$$V(\vec{x}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi |\vec{x}|} \quad (1)$$

gegeben ist. Dabei sind die q_i dimensionslose Ladungszahlen der beteiligten Teilchen. Für die Elementarladung gilt also in unseren Einheiten $e^2/(4\pi) = \alpha \approx 1/137$.

Kontra- bzw. kovariante Vierertensoren werden stets mit oberen bzw. unteren griechischen Indizes notiert. Bei der Spaltung in Raum- und Zeitkomponenten in einem gegebenen Bezugssystem kommt für die kovarianten Komponenten von Vektoren auch die Spaltenschreibweise $(u^\mu) = (u^0, \vec{u})$ zur Anwendung.

Wir verwenden den Riccikalcul, insbesondere die Summationskonvention, wonach über gleichnamige Indizes, jeweils einer oben und einer unten stehend, zu summieren ist. In der Spaltenschreibweise schreiben wir auch kurz $u_\mu v^\mu = uv = u_0 v_0 - \vec{u}\vec{v}$, wobei für Dreivektoren das euklidische positiv definite Skalarprodukt benutzt wird.

2 Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

Wir beginnen mit der relativistisch kovarianten Formulierung der klassischen Elektrodynamik. Die homogenen Maxwellgleichungen ergeben, daß sich elektrisches und magnetisches Feld aus einem Skalar- und einem Vektorpotential herleiten, die zu dem kovarianten Vierervektor A_μ zusammengefaßt werden können.

Die Feldstärken \vec{E} und \vec{B} sind dann im kovarianten Formalismus durch den Faradaytensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2)$$

gegeben. Die noch übrigen Feldgleichungen lauten für das freie Feld

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \square A_\nu - \partial_\nu \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (3)$$

Die Gleichungen ändern sich offenbar nicht, wenn man von A_μ zu

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi \quad (4)$$

übergeht, wobei χ ein beliebiges Skalarfeld sein darf. Dies ist klar, weil sich die Feldgleichungen allein durch den Faradaytensor (2) ausdrücken lassen, und dieser hängt offensichtlich nicht von χ ab. Man bezeichnet dies als Eichinvarianz der Elektrodynamik. Wie wir sehen werden, ist die Eichinvarianz mit spezifischen Problemen bei der kanonischen Quantisierung verbunden, die wir in unserem Fall durch die totale Fixierung der Eichung, also eine eindeutige Festlegung der elektromagnetischen Potentiale A_μ durch Nebenbedingungen, beseitigen werden.

Zunächst müssen wir zum Lagrangeformalismus übergehen. Die Feldgleichungen (3) ergeben sich mit der folgenden Lagrangedichte aus dem Hamiltonschen Prinzip:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (5)$$

Das Wirkungsfunktional ist also

$$S[A_\mu] = \int d^4x \mathcal{L} = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (6)$$

In der Tat rechnet man leicht nach, daß die Funktionalableitung durch

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = \partial^\mu F_{\mu\nu} \quad (7)$$

gegeben ist, und das Hamiltonsche Prinzip verlangt das Verschwinden dieser Ableitung, was wieder auf die Maxwellgleichungen (3) führt.

Soweit war die Formulierung der klassischen Theorie mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips nicht komplizierter als für ein Feld ohne Eichinvarianzen. Es kommt allerdings zu Problemen, wenn wir zum Hamiltonformalismus übergehen. Die Berechnung der kanonischen Feldimpulse liefert nämlich

$$\Pi_\mu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} = F_{\mu 0}. \quad (8)$$

Offenbar ist $\Pi_0 = 0$, und das bedeutet nichts anderes, als daß nicht alle vier Freiheitsgrade des Vektorfeldes A_μ dynamische Freiheitsgrade des elektromagnetischen Feldes sein können. Das ist auch klar, denn aufgrund der Invarianz unter den Eichtransformationen (4) gehört nicht jede Lösung der Bewegungsgleichungen für A_μ zu physikalisch unterscheidbaren Situationen. Alle Felder, die aus einer solchen Lösung durch eine Eichtransformation (4) mit einem beliebigen Eichfeld χ hervorgehen, beschreiben dieselbe physikalische Feldkonfiguration.

Dieses Problem wurde im Laufe der Geschichte der Quantenelektrodynamik auf unterschiedliche Weise gelöst. Wir folgen hier dem ältesten Weg, der auf Diracs Strahlungstheorie zurückgeht, indem wir die Felder A_μ durch Nebenbedingungen einschränken, so daß unter deren

Berücksichtigung die Lösungen eindeutig werden. Der Nachteil dieses Verfahrens ist, daß wir den Boden der manifest kovarianten Rechnung verlassen. Die relativistische Invarianz ist allerdings dadurch sichergestellt, daß ein Ausschöpfen der Eichfreiheit nichts an der relativistischen Invarianz der Wirkung (7) ändern kann, weil diese eichinvariant ist.

Als erstes verlangen wir die Bedingung der Lorentzzeichnung:

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (9)$$

Dies läßt sich stets durch geeignete Wahl eines Eichfeldes χ gewährleisten. Ist nämlich A'_μ eine beliebige Lösung der Feldgleichungen, so ist

$$A_\mu = A'_\mu + \partial_\mu \chi \quad (10)$$

ebenfalls eine Lösung. Genügt χ dabei der inhomogenen Wellengleichung

$$\square \chi = -\partial_\mu A'^\mu, \quad (11)$$

so erfüllt offenbar A_μ die Bedingung der Lorentzzeichnung (9).

Die Lorentzbedingung legt nun aber χ nicht eindeutig fest. Man kann ja zu einer beliebigen Lösung von (11) noch eine Lösung der homogenen Wellengleichung addieren, ohne etwas zu ändern. Ein Blick auf unsere kanonischen Impulse (8) zeigt dann, daß es wünschenswert wäre, wenn wir verlangen dürften $A_0 = 0$. Dies ist in der Tat im Falle freier Felder durch Umeichung stets möglich, ohne die Lorentzbedingung (9) zu verletzen. Ist nämlich A'_μ eine Lösung der Feldgleichungen (3), die der Lorentzbedingung (9) genügt, so ist durch (10) mit

$$\chi = -\int_0^t d\tau A'_0(\tau, \vec{x}). \quad (12)$$

eine Lösung mit $A_0 = 0$ gegeben. Weiter gilt aufgrund der Bewegungsgleichungen (3)

$$\square \chi = 0, \quad (13)$$

so daß mit A'_μ auch A_μ die Lorentzzeichnung erfüllt. Eine totale Fixierung der Eichung wird also durch die Forderungen

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad A_0 = 0 \quad (14)$$

erreicht.

Man bezeichnet die durch (14) festgelegte Eichung als *Strahlungseichung*. Dies weist darauf hin, daß diese Eichung nur im ladungsfreien Raum widerspruchsfrei möglich ist.

Durch diese Überlegungen ist nicht nur das Problem mit der Hamiltonschen Formulierung gelöst, sondern wir sehen, daß von den vier Freiheitsgraden des elektromagnetischen Feldes nur zwei voneinander unabhängig sind, denn (14) liefert zwei Nebenbedingungen.

Jetzt können wir aber die Hamiltondichte ausrechnen:

$$\mathcal{H} = \Pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \vec{\Pi}^2 + \frac{1}{2} \vec{B}^2 \quad \text{mit} \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad (15)$$

wobei wir zur Formulierung mit dreidimensionalen Vektoren übergegangen sind. Wir bemerken, daß $\vec{\Pi} := -(\partial_0 A^a)_{a=1\dots 3} = \vec{E}$ ist, so daß (15) zu der bekannten Energiedichte des elektromagnetischen Feldes führt.

Wir benötigen noch die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes, die sich aus dem Noethertheorem der klassischen Feldtheorie zu

$$\vec{\mathcal{P}} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\rho)} \partial^\nu A^\rho \right]_{\nu=1\dots 3} = \vec{E} \times \vec{B} + \text{div}, \quad (16)$$

wobei div eine vollständige Viererdivergenz andeutet, die irrelevant ist, weil nur der totale Impuls des Feldes physikalische Relevanz beanspruchen kann.¹

Um nun zur quantisierten Theorie zu gelangen, erinnern wir uns von dem Formalismus der ‘zweiten Quantisierung’ her, daß dies am einfachsten durch Quantisierung der Fourierdarstellung geschieht. Dann wird man nämlich direkt zur Formulierung mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren von Energie-Impuls-Eigenzuständen geführt, und dies ist auch genau die Basis, die wir bei der Behandlung der Hohlraumstrahlung verwenden werden.

Den Ansatz

$$A_\mu(x) = a_\mu(\vec{k}) \exp(-ikx) \quad \mu = 1 \dots 3 \quad (17)$$

in die Maxwellgleichung (3) und die Eichbedingungen (14) eingesetzt liefert:

$$k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = 0, \quad \vec{k} \vec{a}(\vec{k}) = 0. \quad (18)$$

Die letztere Gleichung besagt, daß sich ebene elektromagnetische Wellen im ladungsfreien Raum stets transversal ausbreiten. Wir können also durch beliebige Ergänzung von $\vec{k}/|\vec{k}|$ mit $\vec{e}_j(\vec{k})$ ($j = 1, 2$) zu einem Orthonormalsystem jedes Feld in der Form

$$\vec{A}(x) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2|\vec{k}|}} \sum_{j=1}^2 \left[a_j(\vec{k}) \exp(-ikx) + a_j^*(\vec{k}) \exp(ikx) \right]_{k_0=|\vec{k}|} \vec{e}_j(\vec{k}) \quad (19)$$

nach ebenen Wellen entwickeln. Dabei haben wir der Tatsache Rechnung getragen, daß die Felder reell sind.

Die Quantisierung erfolgt nun durch Übergang zu Operatoren

$$\vec{A}(x) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2|\vec{k}|}} \sum_{j=1}^2 \left[\mathbf{a}_j(\vec{k}) \exp(-ikx) + \mathbf{a}_j^\dagger(\vec{k}) \exp(ikx) \right]_{k_0=|\vec{k}|} \vec{e}_j(\vec{k}). \quad (20)$$

Es ist zu bemerken, daß wir durch Wahl der Darstellung hier bereits der Kausalitätsforderung der relativistischen Quantenfeldtheorie Rechnung getragen haben, indem wir die negativen Energiezustände mit Erzeugungsoperatoren \mathbf{a}^\dagger angesetzt haben. Dies ist die sog. Feynman-Stueckelberg-Methode zur Interpretation der negativen Energiezustände.

Nach dem Spin-Statistiktheorem sind nun Teilchen mit ganzzahligen Spins (das Photon trägt als Vektorfeld Spin 1) mit bosonischen Vertauschungsregeln zu quantisieren, so daß wir die Kommutatorrelationen für die Erzeuger und Vernichter wie folgt zu schreiben haben:

$$\left[\mathbf{a}_i(\vec{k}), \mathbf{a}_j(\vec{k}') \right]_- = 0, \quad \left[\mathbf{a}_i(\vec{k}), \mathbf{a}_j^\dagger(\vec{k}') \right]_- = \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (21)$$

¹Nur im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie führt die Energie-Impulsdichte selbst über die Einsteinschen Feldgleichungen zu physikalischen Aussagen

Durch eine einfache Rechnung folgt daraus, daß die Feldoperatoren die kanonischen “gleichzeitigen Vertauschungsrelationen”

$$i [\mathbf{\Pi}_i(x), \mathbf{A}_j(y)]_{-} \Big|_{x_0=y_0} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ij} \quad (22)$$

erfüllen, wie es sein muß.

Für die Berechnung des Hamilton- und des Gesamtimpulsoperators wenden wir die Vorschrift der Normalordnung an, der zufolge die Operatoren so anzuordnen sind, daß alle Erzeuger links von allen Vernichtern zu stehen kommen. Dies entspricht einer willkürlichen Wahl des Energienullpunktes und beseitigt den unendlichen Beitrag der Nullpunktsenergie. Der Energienullpunkt liegt dann gerade bei der niedrigsten Energie des Systems.

Durch Übertragung der klassischen Gleichungen (15) und (16) nach dieser Vorschrift in die quantisierte Theorie folgt dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} : (\vec{\mathbf{E}}^2 + \vec{\mathbf{B}}^2) := \int d^3\vec{k} \sum_{j=1}^2 \mathbf{n}_j(\vec{k}) |\vec{k}| \\ \mathbf{P} &= \int d^3\vec{x} : \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} := \int d^3\vec{k} \sum_{j=1}^2 \mathbf{n}_j(\vec{k}) \vec{k}. \end{aligned} \quad (23)$$

Dabei sind die $\mathbf{n}_j(\vec{k})$ die Operatoren der Photonendichte mit einer Polarisation in Richtung \vec{e}_j und Impuls \vec{k} .

Die Berechnung der verallgemeinerten Energie-Impuls-Eigenvektoren ist von der elementaren Theorie des harmonischen Oszillators her bekannt. Wir geben nur das Resultat an.

Der Hilbertraum wird aufgespannt von den simultanen verallgemeinerten Eigenvektoren der Form

$$|n(\vec{k}, j)\rangle = \prod'_{\vec{k}, j} \frac{1}{\sqrt{n(\vec{k}, j)!}} (\mathbf{a}_j^\dagger)^{n(\vec{k}, j)} |0\rangle, \quad (24)$$

wobei $|0\rangle$ der Zustand niedrigster Energie mit $\mathbf{n}_j(\vec{k}) |0\rangle = 0$ für alle \vec{k}, j ist, und \prod' bezeichnet ein beliebiges Produkt über endlich viele Werte $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ und $j = 1, 2$. Jedes $n(\vec{k}, j)$ darf dabei in $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ liegen.

Es ist klar, daß dies nur eine einfache Schreibweise für die Produktbasis des bosonischen Fockraums, also dem topologischen Span symmetrisierter direkter Produkte von Einteilchenzuständen, darstellt, die sog. *Besetzungszahldarstellung*.

3 Quantenstatistik

In diesem Abschnitt wollen wir an grundlegende Beziehungen der Quantenstatistik erinnern. Die Quantenstatistik wird immer dann angewandt, wenn wir es mit einer Situation zu tun haben, in der eine vollständige Zuordnung des Quantenzustandes zu einem System durch Messung nicht praktikabel ist. Das kann an praktischen Auflösungsgrenzen der verwendeten Meßapparatur oder an der Komplexität des untersuchten (z.B. makroskopischen) Systems liegen.

In der Quantenstatistik wird der Zustandsbegriff dahingehend erweitert, daß nicht nur Strahlen im Hilbertraum zur Spezifikation des Zustandes herangezogen werden. Diese Strahlen sind ja die maximal mögliche Kenntnis, die wir aufgrund der Quantentheorie durch Messung eines vollständigen Satzes verträglicher Observabler von dem System überhaupt erhalten können. Man nennt daher einen Strahl im Hilbertraum auch *reinen Zustand*.

Im Gegensatz dazu führt man bei fehlender Kenntnis des Systems die i.a. inkohärente Überlagerung von Zuständen in der Form

$$\mathbf{R} = \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j |j\rangle \langle j|, \quad \text{Tr } \mathbf{R} = \sum_j p_j = 1 \quad (25)$$

ein. Dies entspricht der Situation, daß von jedem Zustand $|j\rangle$ eines vollständigen Orthonormalsystems die Wahrscheinlichkeit p_j angegeben ist, daß sich das System in eben von diesem ket repräsentierten Zustand befindet. Offenbar kann ein reiner Zustand in umkehrbar eindeutiger Weise durch einen Projektor der Form $|\psi\rangle \langle \psi|$ mit einem normierten Hilbertraumvektor $|\psi\rangle$ beschrieben werden. Dies ermöglicht die einheitliche Beschreibung von reinen und gemischten Zuständen in der Form (25).

Ist der Statistische Operator \mathbf{R} gegeben, so berechnet sich der Erwartungswert einer Observablen O , die durch den hermiteschen Operator \mathbf{O} repräsentiert wird, vermöge

$$\langle O \rangle = \text{Tr}(\mathbf{O}\mathbf{R}). \quad (26)$$

Ist $\{|r\rangle\}_{r \in \mathbb{N}}$ Eigensystem von \mathbf{O} zu den Eigenwerten o_r , gilt offenbar

$$\langle O \rangle = \sum_{r \in \mathbb{N}} \sum_{r' \in \mathbb{N}} p_{r'} \langle r | r' \rangle \langle r' | \mathbf{O} | r \rangle = \sum_{r \in \mathbb{N}} p_r o_r, \quad (27)$$

wie zu erwarten für den gegebenen statistischen Operator, der eine statistischen Gesamtheit von Systemen beschreibt, bei denen die Messung der Observablen O mit der Wahrscheinlichkeit p_r das Resultat o_r liefert.

Die Dynamik des Systems ist durch die bildunabhängige *von Neumann-Gleichung* gegeben:

$$\frac{1}{i} [\mathbf{R}, \mathbf{H}]_- + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right)_{\text{expl.}} = 0. \quad (28)$$

Diese Gleichung beschreibt die Tatsache, daß die quantenmechanische Zeitentwicklung, die durch den Hamiltonoperator \mathbf{H} bestimmt ist, die Zuordnung des statistischen Operators zum System nicht ändert.

Wir interessieren uns hier für den Fall des thermodynamischen Gleichgewichts, das dadurch definiert ist, daß \mathbf{R} nicht explizit zeitabhängig ist. Das bedeutet der von Neumann-Gleichung (28) zufolge, daß \mathbf{R} mit dem Hamiltonoperator vertauscht. Dies wiederum impliziert, daß \mathbf{R} allein von Erhaltungsgrößen des Systems abhängen kann.

Nun erhebt sich aber die Frage, welcher statistische Operator für eine konkrete Situation zu wählen ist. Auf diese Frage können uns die fundamentalen Grundlagen der Physik keine Antwort geben, denn es handelt sich um ein rein statistisches Problem. Die Struktur der von Neumann-Gleichung zeigt, daß wir es mit einem Anfangswertproblem zu tun haben, d.h. wir müssen den statistischen Operator zur Anfangszeit festlegen. Die typische Situation ist, daß wir von einem System einige wenige Größen kennen. Dies beschreiben wir nun statistisch

dadurch, daß wir uns ein Ensemble von gleichartig präparierten Systemen denken (Gibbssches Ensemble), für das die Erwartungswerte der Größen die bekannten Werte annehmen.

Es ist klar, daß es beliebig viele Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_r (und damit statistische Operatoren) gibt, für die diese Bedingung zutrifft. Welche dieser Verteilungen ist nun aber zur Beschreibung des Systems zu wählen? Diese Frage wird durch die *Informationstheorie*, die von Shannon Ende der vierziger Jahre im Zusammenhang mit Untersuchungen zur Statistischen Signaltheorie der Elektrotechnik entwickelt worden ist.

Zunächst wird ein Maß für die gegenüber der exakten Kenntnis des Systemzustandes fehlende Information bei gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung p_r definiert. Es stellt sich dabei heraus, daß ein solches Maß, das aufgrund einiger weniger einleuchtender Annahmen über die Bedeutung von "Information über das System" eindeutig bestimmt werden kann, die *von Neumann-Entropie*:

$$S = - \langle \ln \mathbf{R} \rangle = - \sum_r p_r \ln p_r. \quad (29)$$

Um nun zu vermeiden, daß wir durch die Wahl der Wahrscheinlichkeitsverteilung mehr Information über das System vortäuschen, als wir tatsächlich besitzen, werden wir gezwungen, von allen Verteilungen, die im Einklang mit der gegebenen Information stehen, diejenige zu wählen haben, für die die Entropie maximal wird. Dies ist in der Informationstheorie als das *Jaynesche Prinzip vom geringsten Vorurteil* bekannt.

4 Der kovariante Statistische Operator

Wir wenden uns nun der quantenstatistischen Beschreibung der Hohlraumstrahlung zu. Zunächst müssen wir klären, wie wir den statistischen Operator dem Jayneschen Prinzip gemäß zu wählen haben.

Die Hohlraumstrahlung ist elektromagnetische Strahlung in einem aus ideal leitenden Wänden bestehenden Kasten, der sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Wie wir oben gesehen haben, wird eine Situation des thermodynamischen Gleichgewichtes durch einen statistischen Operator beschrieben, der eine Funktion der Erhaltungsgrößen des Systems ist. Hierbei interessieren wir uns nicht für die Polarisation der Strahlung, so daß wir nur Erwartungswerte für Energie und Impuls des Strahlungsfeldes zum Anfangszeitpunkt der Beobachtung vorgeben. Es ist klar, daß der statistische Operator dann aufgrund der von Neumann-Gleichung (28) überhaupt zeitlich konstant ist.

Es ist nun klar, daß aufgrund dieser Wahl der bekannten Information die Behandlung in der Energie-Impulsdarstellung, die wir schon bei der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes verwendet haben, zweckmäßig ist. Das Problem besteht dabei darin, daß Hamilton- und Impulsoperatoren kontinuierliche Spektren besitzen. Dadurch wird die Anwendung der im vorigen Abschnitt angedeuteten Theorie mathematisch problematisch. Wir können uns dieser rein mathematischen Probleme dadurch entledigen, daß wir vom unendlichen Raum, den wir der Quantisierung zugrundegelegt haben, zu einem endlichen Hohlraum, dem *Quantisierungsvolumen* übergehen. Dies geschieht formal durch die Einführung geeigneter Randbedingungen an die Felder. Andererseits interessieren wir uns aber nicht für mit dem begrenzten Volumen verbundene Randeffekte. Dies würde das Problem auch dahingehend komplizieren, als wir eine detaillierte Beschreibung der an den Wänden stattfindenden Absorptions- und Emissionsprozessen geben müßten. Wir wollen also am Schluß der Rechnung wieder den Limes

des unbegrenzten Raumes und kontinuierlicher Energie- und Impulsspektren betrachten. Wir können also die Randbedingungen so einfach wie möglich wählen, ohne daß diese weiter physikalische Bedeutung haben. Es bietet sich also an, das Quantisierungsvolumen als Würfel der Kantenlänge L zu wählen und den Feldern periodische Randbedingungen der Form

$$\tilde{\mathbf{A}}(t, \vec{x} + L\vec{e}_i) = \tilde{\mathbf{A}}(t, \vec{x}) \text{ für } i = 1, 2, 3 \quad (30)$$

aufzuerlegen.

Diese Randbedingungen ermöglichen wieder die Fourierentwicklung nach ebenen Wellen, nur daß das Spektrum diskret ist und die Fourierintegrale in Fourierreihen übergehen, d.h. wir haben jetzt die Darstellung

$$\tilde{\mathbf{A}} = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \sum_{j=1}^2 \vec{e}_j \left\{ \mathbf{a}_j(\vec{n}) \exp[-ik(\vec{n})x] + \mathbf{a}_j^\dagger(\vec{n}) \exp[ik(\vec{n})x] \right\}_{k_0(\vec{n})=|\vec{k}(\vec{n})|}, \quad (31)$$

wobei wir $k(\vec{n})$ unseren periodischen Randbedingungen gemäß

$$\vec{k}_j = \frac{2\pi}{L} \vec{n} \text{ mit } \vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \quad (32)$$

gesetzt haben.

Der Hilbertraum ist wieder genauso als Fockraum zu konstruieren wie im Falle kontinuierlicher Impulse. Wir schreiben den statistischen Operator in der Energie-Impulsdarstellung:

$$\mathbf{R} = \sum_{P, \alpha} p(P, \alpha) |P, \alpha\rangle \langle P, \alpha|, \quad (33)$$

wobei α der Entartung der simultanen Energie-Impulseigenvektoren Rechnung trägt. Es ist klar, daß in unserem Fall diese Eigenvektoren in der Besetzungszahldarstellung zur Anwendung kommen werden. Wir müssen nun die von Neumann-Entropie unter den Nebenbedingungen

$$\text{Tr } \mathbf{R} = \sum_{P, \alpha} p(P, \alpha) = 1, \quad \langle \mathbf{P}^\mu \rangle =: \mathcal{P}^\mu = \sum_{P, \alpha} P^\mu p(P, \alpha) \quad (34)$$

durch Wahl der Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(E, \vec{P}, \alpha)$ maximal machen. Dies erreichen wir mit Hilfe der Methode der Lagrangeoperatoren. Das bedeutet wir suchen das Maximum der Hilfsfunktion

$$S' = S + u_\mu \mathcal{P}^\mu + \Omega - 1 \quad (35)$$

und variieren nach den p :

$$\delta S' = -\delta \sum_{P, \alpha} p(P, \alpha) \ln[p(P, \alpha)] = -\sum_{P, \alpha} \delta p(P, \alpha) [\ln[p(P, \alpha)] + u_\mu P^\mu + \Omega] = 0. \quad (36)$$

Da die p frei variiert werden dürfen, weil den Zwangsbedingungen (34) durch geeignete Wahl der Lagrangeparameter u_μ und Ω Rechnung getragen werden kann, muß der in der Klammer stehende Ausdruck verschwinden, d.h.

$$p(P, \alpha) = \frac{1}{Z} \exp(-u_\alpha P^\alpha) \text{ mit } \Omega = \ln Z = \sum_{P, \alpha} \exp(-u_\mu P^\mu). \quad (37)$$

In darstellungsfreier Form ist also der Statistische Operator durch

$$\mathbf{R} = \frac{1}{Z} \exp(-u_\mu \mathbf{P}^\mu) \quad \text{mit } Z = \text{Tr}[\exp(-u_\mu \mathbf{P}^\mu)] \quad (38)$$

gegeben. Wir sehen sofort, daß dies ein skalarer Operator ist, wenn sich die u_μ unter eigentlich orthochronen Lorentztransformationen als Vierervektor transformieren. Für $u_\alpha = \beta = 1/T$ geht der statistische Operator in den Operator der *kanonischen Verteilung* über. Wir werden gleich sehen, daß sich durch eine geeignete Wahl des Bezugssystems stets diese Form erreichen läßt. Das bedeutet aber, daß die Wahl des statistischen Operators ein Bezugssystem auszeichnet, nämlich das, in dem der Dreierimpuls des Gesamtsystems verschwindet und die Verteilung eine kanonische wird. Dies bedeutet, daß die Wahl des Zustandes die Lorentzsymmetrie bricht. Es liegt ein typischer Fall von *spontaner Symmetriebrechung* vor, denn die dynamischen Gesetze, die durch das Wirkungsfunktional definiert werden, sind lorentzinvariant, nicht aber der zur Beschreibung der Situation zugrundegelegte Zustand.

Jetzt müssen wir nur noch (23) in der durch die Einführung der periodischen Randbedingungen diskretisierten Form für die Impulse einsetzen. Alle statistischen Aussagen lassen sich dann durch Ableiten der Zustandssumme Z nach den Lagrangparametern u^μ berechnen. Es gilt

$$Z = \text{Tr} \exp[-u_\mu \mathbf{P}^\mu] = \prod_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \prod_{j=1}^2 \sum_{n_j(\vec{n})=0}^{\infty} \exp[-u_\alpha P(\vec{n}) n_j(\vec{n})] = \prod_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \prod_{j=1}^2 \frac{1}{1 - \exp[-u_\mu P^\mu(\vec{n})]}. \quad (39)$$

Als erstes können wir nun den Wertebereich der u_μ angeben, für den die obige Zustandssumme überhaupt sinnvoll ist. Wir haben im letzten Schritt die geometrische Reihe für jedes $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3$ und $j = 1, 2$ aufsummiert. Infolgedessen muß der Exponent in der Exponentialfunktion negativ sein, d.h. $u_\mu P^\mu(\vec{n}) > 0$ für alle $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3$. Da nun aber $P_\mu(\vec{n}) P^\mu(\vec{n}) = 0$ ist, bedeutet das, daß u_μ zeitartig und $u_0 > 0$ sein muß. Dies ist für $u = (\beta, 0, 0, 0)$ sicher der Fall. Alle übrigen erlaubten Werte von u lassen sich aber daraus durch eigentlich orthochrone Lorentztransformationen erzeugen. Das zeigt, daß die oben ausgesprochene Vermutung tatsächlich zutrifft: Durch die Wahl der Gleichgewichtsverteilung wird ein Bezugssystem ausgezeichnet, nämlich das, in dem der Gesamtimpuls $\vec{\mathcal{P}}$ verschwindet. Alle übrigen physikalisch sinnvollen Situationen ergeben sich dann durch eigentlich orthochrone Lorentztransformationen. Gleichzeitig bemerken wir, daß die Temperatur wegen $1/T^2 = \beta^2 = u_\mu u^\mu$ ein Skalar ist. Dies war zu erwarten, handelt es sich doch um eine innere Eigenschaft des Systems.

Um dieses Programm nun praktisch durchführen zu können, berechnen wir die Zustandssumme (39) im Limes kontinuierlicher Impulse. Logarithmieren von (39) ergibt

$$\Omega := \ln Z = -2 \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \ln\{1 - \exp(-u_\mu P^\mu[\vec{n}])\}. \quad (40)$$

Für einen Hohlraum, dessen Abmessungen groß gegen den relevanten Wellenlängenbereich des Problems ist, können wir diese Summe durch ein Integral approximieren, denn ein kleines Impulsvolumen $d^3 \vec{k}$ entspricht dann gemäß (32)

$$\Delta n = \frac{L^3}{(2\pi)^3} d^3 \vec{k} \quad (41)$$

Zuständen mit nahezu dem gleichen Impuls. Im kontinuierlichen Limes gilt demzufolge exakt:

$$\ln Z = -\frac{2}{(2\pi)^3} \int V d^3 \vec{k} \ln[1 - \exp(u_\mu k^\mu)]_{k^0=|\vec{k}|}. \quad (42)$$

Dabei ist V das Volumen des Systems gemessen in dem Bezugssystem des Beobachters, in dem die Lagrangeparameter u_μ gegeben sind. Wie transformiert sich nun das Volumen V ? Betrachten wir dazu das Bezugssystem Σ_0 , mit $u_0 = \beta$, $\vec{u} = 0$, also das Ruhssystem des Hohlraums. Betrachten wir jetzt einen Lorentzboost mit Geschwindigkeit $-1 < v < 1$ in 1-Richtung. Dann ist bekanntlich

$$(u^\mu) = \frac{\beta}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

d.h. für die allgemeine Geschwindigkeit \vec{v} des Beobachters gegen den strahlenden Hohlraum

$$(u^\mu) = \frac{\beta}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\vec{v} \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Das Volumenelement im Ruhssystem sei $V_0 = \int_{V_0} d^3\vec{x}_0$. Das Viererwegelement im System Σ ist aber

$$(dx^\mu) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} dx_0^0 - v dx_0^1 \\ -v dx_0^0 + dx_0^1 \\ dx_0^2 \\ dx_0^3 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Für einen Beobachter in Σ ist aber das Volumenelement durch $d^3\vec{x}|_{dx^0=0}$ bestimmt. Dies ergibt dann gemäß (45) $dx_0^0 = -v dx_0^1$, und dies in die drei unteren Komponenten von (dx^μ) eingesetzt ergibt schließlich den gesuchten Zusammenhang zwischen dem Volumen des Hohlraums im jeweiligen Bezugssystem (gleich für allgemeines \vec{v} geschrieben):

$$V = \sqrt{1-\vec{v}^2} V_0 = \frac{\beta}{u_0} = \frac{\sqrt{u_\mu u^\mu}}{u_0}. \quad (46)$$

Zur Berechnung des Integrals führen wir Kugelkoordinaten mit \vec{u} als Polarachse ein. Die übliche Substitution $\xi = \cos\theta$ ergibt:

$$\Omega(u_\mu) = -\frac{V}{2\pi^2} \int_{-1}^1 d\xi \int_0^\infty d\omega \omega^2 \ln\{1 - \exp[-\omega(u_0 - u\xi)]\}. \quad (47)$$

Partielle Integration bzgl. ω liefert

$$\Omega = \frac{V}{6\pi^2} \int_{-1}^1 d\xi \int_0^\infty \frac{\omega^3(u_0 - u\xi)}{\exp[\omega(u_0 - u\xi)] - 1} \quad (48)$$

Substitution von $\eta = \omega(u_0 - u\xi)$ ermöglicht schließlich die analytische Integration:

$$\Omega = \frac{V\pi^2}{45} \frac{u_0}{\beta^4}, \quad (49)$$

wobei wir das Integral

$$\int_0^\infty d\eta \frac{\eta^3}{\exp(\eta) - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad (50)$$

benutzt haben (seine Berechnung wird im Anhang nachgeliefert). Weiter haben wir berücksichtigt, daß $u^2 = \beta^2$ ist. Einsetzen von (46) ergibt nunmehr die manifest kovariante Form für Ω :

$$\Omega(u^\mu) = \frac{\pi^2 V_0}{45} (u_\mu u^\mu)^{-3/2}. \quad (51)$$

Hierin manifestiert sich die Auszeichnung des Ruhsystems des Wärmebades darin, daß der Skalar (!) V_0 explizit auftritt. Ω ist aber, als Funktion von u^μ ein Skalarfeld, wie es sein muß. Aus dieser Darstellung lassen sich nun leicht die Erwartungswerte für Energie und Impulse ausrechnen:

$$\langle \mathbf{P}_\mu \rangle = \mathcal{P}_\mu = \frac{\partial \Omega}{\partial u^\mu} = \frac{\pi^2 V_0}{15 \beta^5} u_\mu, \quad (52)$$

wobei wir wieder $u_\mu u^\mu = \beta^2$ genutzt haben. Die invariante Masse der Strahlung ist durch

$$\sqrt{\mathcal{P}_\mu \mathcal{P}^\mu} = \frac{\pi^2 V_0}{15 \beta^4}, \quad (53)$$

und das ist die Gesamtenergie der Strahlung im Ruhsystem des Wärmebades.

5 Das Spektrum

Jetzt wenden wir uns der Frage zu, ob und wie wir die Bewegung des Wärmebades gegenüber dem Beobachter messen können. Dies sollte prinzipiell möglich sein, weil wir ja gesehen haben, daß das Ruhsystem des Wärmebades durch die Wahl des Gleichgewichtszustandes ausgezeichnet wird.

Dazu müssen wir lediglich auf gegebenen Dreierimpuls projizieren um zur Teilchen- bzw. Energiedichte zu gelangen. Dazu muß man nur formal in (40) nach $u_\mu P^\mu(\vec{n})$ ableiten, mit $-1/\beta$ multiplizieren und mit Hilfe von (41) zum Kontinuumslimit übergehen:

$$d\mathcal{N} = \frac{2V d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp[u_\mu k^\mu] - 1} \Big|_{k_0=|\vec{k}|}. \quad (54)$$

Daraus folgt die Energiedichte

$$d\mathcal{E} = \omega d\mathcal{N} = \frac{2V d\omega d^2 \Omega_{\vec{k}}}{(2\pi)^3} \frac{\omega^3}{\exp[\omega(u_0 + |\vec{u}| \cos \theta)] - 1}. \quad (55)$$

Dabei ist θ der Winkel zwischen der Geschwindigkeit des Beobachters gegen die Bewegungsrichtung des Photons. Dies zeigt, daß sich in jeder Richtung die Hintergrundstrahlung mit einem Planckspektrum fiten läßt:

$$d\mathcal{E}_{\text{Planck}} = \frac{2V d\omega d^2 \Omega_{\vec{k}}}{(2\pi)^3} \frac{\omega^3}{\exp(\beta' \omega) - 1}. \quad (56)$$

Für $\vec{u} \neq 0$ ist jedoch die inverse Temperatur von der Beobachtungsrichtung abhängig, und zwar gemäß (55) und (44):

$$\beta' = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} (1 + |\vec{v}| \cos \theta). \quad (57)$$

Messungen des Satelliten COBE ergeben, daß wir mit einer Geschwindigkeit von (390 ± 60) km/s in Richtung des Sternbildes Löwe driften (nach [Goe96]).

Nach dem obigen ist allerdings die korrekte Interpretation des kovariant geschriebenen Spektrums eine andere, denn die inverse Temperatur ist als Skalar aufzufassen, und wir müssen schreiben

$$d\mathcal{E} = \omega d\mathcal{N} = \frac{2V d\omega d^2\Omega_{\vec{k}}}{(2\pi)^3} \frac{\omega^3}{\exp\left[\frac{\beta\omega}{\sqrt{1-v^2}}(1 + |\vec{v}| \cos\theta)\right] - 1} \quad (58)$$

Das bedeutet, daß die Photonendichte blau- (für $0 \leq \theta < \pi/2$) bzw. rotverschoben (für $\pi/2 < \theta < \pi$) erscheint.

A Berechnung des ‘‘Planck-Integrals’’

In diesem Anhang wollen wir das oben benutzte Resultat

$$\int_0^\infty d\eta \frac{\eta^3}{\exp \eta - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad (59)$$

beweisen.

Als erstes schreiben wir den Integranden als geometrische Reihe:

$$f(\eta) = \frac{\eta^3}{\exp \eta - 1} = \frac{\eta^3 \exp(-\eta)}{1 - \exp(-\eta)} = \eta^3 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\eta k). \quad (60)$$

Da diese Reihe im Integrationsgebiet gleichmäßig konvergiert, darf das Integral gliedweise berechnet werden. Die Reihenglieder lassen sich elementar integrieren mit Hilfe der erzeugenden Funktion

$$g(x) = \int_0^\infty d\eta \exp(-\eta x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int_0^\infty d\eta \eta^3 \exp(-\eta k) = -\frac{d^3}{dx^3} g(x)|_{x=k} = \frac{1}{k^4}, \quad (61)$$

so daß unser Problem auf die Summation der Reihe

$$I = \int_0^\infty d\eta \frac{\eta^3}{\exp \eta - 1} = 6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = 3 \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{1}{k^4} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \quad (62)$$

zurückgeföhrt ist. Dies gelingt nun mit Hilfe der komplexen Integration. Dazu benutzen wir

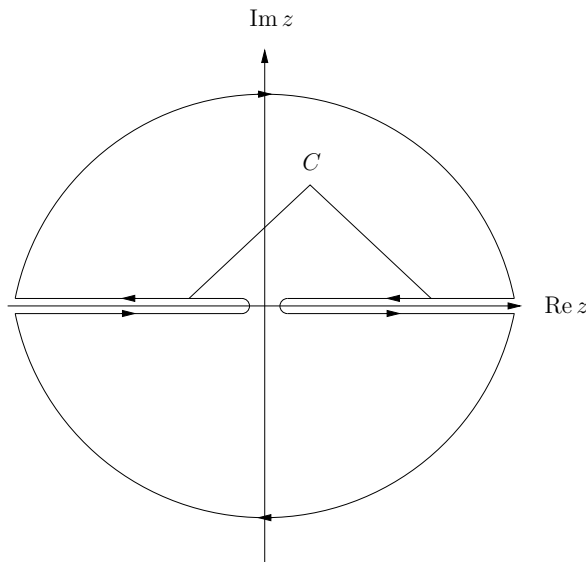


Abbildung 1: Zur Summation der Reihe

die Tatsache, daß $\pi \cot(\pi z)$ in $z \in \mathbb{Z}$ Residuen 1 besitzt, so daß wir bei Wahl des Weges C in (Abb. 1) schreiben können:

$$I = \frac{3\pi}{2\pi i} \int_C dz \frac{\cot(\pi z)}{z^4}. \quad (63)$$

Der Integrationsweg kann nun durch die beiden Halbkreise im Unendlichen geschlossen gedacht werden, weil diese nicht zum Integral beitragen. Dieser Weg entspricht aber einem Umlauf von $z = 0$ im mathematisch negativen Sinne, weil der Integrand ansonsten keine Residuen im Inneren des Weges aufweist. Daher gilt

$$I = -\frac{3\pi}{4!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^4}{dz^4} z \cot(\pi z) = \frac{\pi^4}{15}, \quad (64)$$

und das war zu zeigen.

Literatur

[Goe96] Hubert Gönner, Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie, Spektrum Akademischer Verlag, 1996