

Invariantentheoretische Hydrodynamik

Hendrik van Hees
mailto:hees@physik.uni-bielefeld.de
Fakultät für Physik
Universität Bielefeld
Universitätsstraße 25
D-33615 Bielefeld

07. Oktober 2002

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Die Symmetrien des Newtonschen Raum-Zeit-Kontinuums	2
3	Die Newtonsche Dynamik und das Hamiltonsche Prinzip	4
3.1	Grundlagen zur Beschreibung kontinuierlicher mechanischer Systeme	6
3.2	Umrechnung zwischen Euler- und Lagrangekoordinaten	8
3.3	Anwendung des Hamiltonschen Prinzips auf inkompressible Medien	10
3.4	Kompressible Fluide	11
4	Das Noethertheorem	13
4.1	Äquivalente Lagrangedichten	13
4.2	Das Noethertheorem	13
4.3	Die lokale Form der Erhaltungssätze	16
4.4	Anwendung auf die Galileigruppe	16

Zusammenfassung

Dieser Artikel basiert auf der Ausarbeitung eines Seminarvortrags, gehalten im gemeinsamen Seminar der Fachbereiche Mathematik und Mechanik (Prof. Roesner) an der TH Darmstadt am 12. Juli 1995.

1 Einleitung

Spätestens seit der Entwicklung der grundlegenden Theorien von Raum und Zeit durch Einstein (1905 bzw. 1916) ist die Bedeutung der kovarianten Formulierung der Physik in beliebig parametrisierten Koordinaten offenkundig. Das geeignete mathematische Werkzeug ist allerdings schon

viel älter: Es ist durch die Formulierung der Theorien in Gestalt des Hamiltonschen Prinzips gegeben und zeichnet sich dadurch aus, daß alle Grundgleichungen einer Theorie aus einem invarianten Funktional durch kovariante Ableitungen ausgedrückt werden können. Damit ist die kovariante Formulierung, d.h. die Forminvarianz der Gleichungen unter beliebigen Punkttransformationen gewährleistet. Dies entspricht der unmittelbar einleuchtenden Forderung, daß die Aussagen der Gleichungen nicht von der Wahl einer speziellen Parametrisierung der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit abhängen dürfen.

Neben dieser praktischen Bedeutung des Hamiltonschen Formalismus kommt ihm aber noch eine theoretische Bedeutung zu, nämlich durch die *Noetherschen Theoreme*, die die Bedeutung der Symmetrien des Wirkungsfunktional für die Bewegung des Systems sicherstellen, nämlich die Existenz von Erhaltungsgrößen: Jede Erzeugende einer Einparameteruntergruppe einer Liegruppe, die die Variation des Wirkungsfunktional invariant läßt, stellt eine *Erhaltungsgröße* unter der Bewegung des Systems dar. Umgekehrt generiert jede Erhaltungsgröße eine Einparametergruppe, die die Wirkung invariant läßt. Auf diese Weise werden nicht zuletzt die physikalischen Observablen durch die Geometrie des Systems eindeutig festgelegt.

Im folgenden sollen diese allgemeinen Überlegungen anhand der klassischen Hydrodynamik der *idealen Fluide* demonstriert werden. Dazu werden in Abschnitt 2 zunächst die grundlegenden Symmetrien des Newtonschen Raum-Zeit-Kontinuums anhand der Punktsysteme betrachtet. Das Hauptergebnis wird sein, daß die zehnparametrische Galileigruppe, die von den *räumlichen und zeitlichen Translationen, den räumlichen Drehungen und den Galileiboosts* erzeugt wird, die Symmetriegruppe der Newtonschen Raum-Zeit ist. Da wir im folgenden nur die Liealgebra dieser Gruppe benötigen, brauchen wir auf die relativ komplizierte algebraische und topologische Struktur der vollen Galileigruppe nicht näher einzugehen. Glücklicherweise legt bereits die *Drehgruppe* allein den wesentlichen Kalkül der physikalischen Größen fest, nämlich *euklidische Tensoren* zu sein.

In Abschnitt 3 soll das Hamiltonsche Prinzip auf die Hydrodynamik, also ein mechanisches System mit kontinuierlich vielen Freiheitsgraden, angewandt werden.

In Abschnitt 4 wird schließlich das Noethertheorem behandelt, indem die Forderungen an eine Symmetrietransformation untersucht und die Folgerungen aus der Symmetrie für die Bewegung des Systems betrachtet werden.

2 Die Symmetrien des Newtonschen Raum-Zeit-Kontinuums

In der modernen Physik hat sich seit Einstein eine geometrische Betrachtungsweise des Problems der Beschreibung von Raum und Zeit etabliert. Gemeint ist hierbei Geometrie im invariantentheoretischen Sinne: Nach *Kleins Erlanger Programm* charakterisiert man eine gegebene Geometrie durch die Transformationsgruppe, die die Struktur der Geometrie ungeändert läßt. In der Newtonschen Physik ist die Geometrie von Raum und Zeit durch die euklidische Geometrie des Raumes und der von ihm unabhängigen Zeit gegeben. Im folgenden wollen wir den „kontinuierlichen Teil“ (d.h. die Zusammenhangskomponente der Gruppe, die die Identität enthält) der Symmetriegruppe der Newtonschen Raum-Zeit betrachten. Dazu erinnern wir uns zunächst der Struktur des Newtonschen Raum-Zeit-Kontinuums:

Definition (Zeit):

Die physikalische Zeit ist ein eindimensionaler reeller orientierter affiner Raum, der mit der

natürlichen Metrik von \mathbb{R} versehen ist. Als solcher ist die Zeit bei Festlegung eines willkürlichen Zeitpunktes isomorph zum archimedisch geordneten vollständigen Zahlenkörper \mathbb{R} .

Definition (Raum):

Der physikalische Raum ist ein dreidimensionaler reeller euklidischer affiner Raum. Durch Auszeichnung eines Raumpunktes und eines willkürlichen kartesischen Dreibeins als Vektorraumbasis ist der physikalische Raum also zum euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^3 isomorph.

Da topologische Vektorräume stets Abelsche topologische Gruppen sind, sind die Räume vermöge der Gruppentranslationen homogen, also herrscht in Raum und Zeit Translationsinvarianz. Dies drückt sich darin aus, daß alle Raum- bzw. Zeitpunkte physikalisch gleichberechtigt sind und rechtfertigt gleichzeitig die willkürliche Wahl sowohl des Zeit- als auch des Raumursprungs des raumzeitlichen Koordinatensystems.

Weiter betrachten wir die Symmetrien des euklidischen \mathbb{R}^3 . Als Vektorraum muß die Symmetriegruppe eine Untergruppe der $GL(3)$ sein (die allgemeine lineare Gruppe des \mathbb{R}^3 ist die Automorphismengruppe des \mathbb{R}^3 , die bei einer festgewählten Basis durch die invertierbaren reellen 3×3 -Matrizen dargestellt wird). Diese Untergruppe wird allein dadurch festgelegt, daß jede in ihr enthaltene Transformation die *Länge eines jeden Vektors ungeändert* läßt. Dies sind genau die orthogonalen Transformationen des \mathbb{R}^3 , die die Gruppe $O(3)$ bilden. Der mit der Identität zusammenhängende Teil, die Drehgruppe $SO(3)$, bildet eine kompakte halbeinfache Liegruppe.

Die Rotationssymmetrie des Raumes verlangt nun, daß sich alle physikalischen Größen unter Drehungen nach einer Darstellung der $SO(3)$ transformieren, also Tensoren sein müssen. Weiterhin müssen auch die Gleichungen der Physik kovariant formulierbar sein, d.h. die Gleichungen bleiben forminvariant unter Rotationen. Aus der Darstellungstheorie der $SO(3)$ folgt nun, daß für die klassische Physik nur die ganzzahligen Darstellungen in Frage kommen. Diese Darstellungen sind genau die Tensordarstellungen, d.h. sämtliche physikalischen Größen müssen $SO(3)$ -Tensoren sein. Hierin sind Skalare und Vektoren als Tensoren 0. bzw. 1. Stufe inbegriffen. Die Zeit ist in diesem Kontext ein skalarer Parameter, der die Kausalfolge der Ereignisse festlegt.

Wir betrachten im folgenden dynamische Systeme, die sich grob in zwei Klassen einteilen lassen:

(a) Systeme von endlich vielen Freiheitsgraden

Das sind im wesentlichen die Systeme aus endlich vielen Massepunkten, die nach Wahl eines raumzeitlichen Koordinatensystems durch Ortsvektoren, die Funktionen von der Zeit sind, beschrieben werden: Eine Ausnahme ist der ideale starre Körper, der mit sechs Freiheitsgraden auch zu dieser Klasse gehört, aber als Kontinuum aufgefaßt werden kann.

(b) Systeme von unendlich vielen Freiheitsgraden

Hierzu zählen einerseits die im folgenden genauer zu besprechenden kontinuumsmechanischen Systeme (z.B. Gase und Fluide), andererseits die Felder (z.B. das elektromagnetische Feld in der Elektrodynamik).

Wir werden uns im folgenden mit der Theorie mechanischer Systeme, die die Dynamik von materiellen Körpern beschreibt, beschäftigen. Dabei benötigen wir nur Tensoren bis zur zweiten Stufe. Seien diese Objekte daher kurz erörtert:

(a) Skalare

Skalare oder Tensoren 0. Stufe transformieren sich unter der trivialen Darstellung, d.h. sie ändern sich unter Drehungen nicht.

(b) Vektoren

Vektoren oder Tensoren 1. Stufe transformieren sich wie die Ortsvektoren, also nach der Fundamentaldarstellung D_1 der Drehgruppe, d.h. ist (x_k) ein bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems gegebener Vektor, dann ist eine $SO(3)$ -Transformation durch eine orthogonale Matrix O_{kl} (orthogonal bedeutet, daß $O_{kl}O_{km} = \delta_{lm}$) gegeben, und der Vektor transformiert sich gemäß

$$x'_k = O_{kl}x_l, \quad (1)$$

wobei wir uns der Einsteinschen Summationskonvention bedienen.

(c) Tensoren 2. Stufe

Tensoren zweiter Stufe transformieren sich wie das Kroneckerprodukt $(x_i y_j)$ zweier Vektoren (x_i) und (y_j) . Ist also T_{ij} ein Tensor zweiter Stufe, so transformiert er sich gemäß (b) vermöge

$$T'_{ij} = O_{ik}O_{jm}T_{km}. \quad (2)$$

Diese Darstellung (die Kroneckerprodukt-darstellung) $SO(3) \times SO(3)$ läßt sich nach dem Clebsch-Gordantheorem in drei irreduzible Bestandteile aufspalten. Irreduzibel heißt hier, daß es keinen unter allen Transformationen der Darstellung invarianten Unterraum gibt. Die Zerlegung einer Darstellung in irreduzible Bestandteile bedeutet die Zerlegung des Darstellungsraums in eine direkte Summe irreduzibler Teilräume. Eine Darstellung heißt vollreduzibel, wenn diese Zerlegung möglich ist. Da die $SO(3)$ eine kompakte halbeinfache Liegruppe ist, sind sämtliche Darstellungen unitär äquivalent und damit vollreduzibel.

Die entsprechende Zerlegung des Tensors T_{ij} ist gegeben durch

$$T_{ik} = \frac{1}{3}T_{jj}\delta_{ik} + \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}) + \frac{1}{2}\left(T_{ik} + T_{ki} - \frac{2}{3}T_{jj}\delta_{ik}\right). \quad (3)$$

Da die Spur eines Tensors ein Skalar ist, transformiert sich der erste Term mit der trivialen Darstellung D_0 . Der antisymmetrische Anteil des Tensors läßt sich durch Dualisieren umkehrbar eindeutig auf einen Vektor abbilden, so daß sich dieser mit der Fundamentaldarstellung D_1 transformiert:

$$T_k^* = \frac{1}{2}\epsilon_{klm}T_{lm} \quad (4)$$

für einen antisymmetrischen Tensor T_{lm} .

Die spurfreien symmetrischen Tensoren bilden einen fünfdimensionalen irreduziblen Teilraum, der sich nach der Darstellung D_2 transformiert. Damit gilt

$$D_1 \otimes D_1 = D_0 \oplus D_1 \oplus D_2. \quad (5)$$

3 Die Newtonsche Dynamik und das Hamiltonsche Prinzip

Nachdem wir oben die physikalisch sinnvollen Größen nach ihrem Transformationsverhalten charakterisiert haben, müssen wir nun die Newtonschen Bewegungsgesetze, also die Dynamik des Systems ins Auge fassen.

Dazu formulieren wir zunächst das erste Newtonsche Gesetz:

Es existiert ein Bezugssystem, in dem ein Teilchen im Zustand der Ruhe oder gleichförmig geradlinigen Bewegung verharrt, sofern es nicht durch äußere Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern.

Unter einem Bezugssystem wird eine Parametrisierung der Newtonschen Raum-Zeit, wie sie in Abschnitt 2 beschrieben wurde, verstanden. Das erste Newtonsche Axiom definiert den Begriff der Kraft axiomatisch, und jedes Bezugssystem, das dieses Axiom erfüllt, heißt *Inertialsystem*.

Das zweite Newtonsche Gesetz definiert die Änderung des Systemzustandes. Für den einzelnen Massepunkt ist dieses Gesetz durch die Newtonsche Grundgleichung

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \quad (6)$$

gegeben, wobei der Vektor \mathbf{F} die auf das Teilchen wirkende Kraft, $\mathbf{x}(t)$ der Ort des Teilchens zur Zeit t und m die Masse des Teilchens ist. Dieses Gesetz ist keineswegs eine Folge des ersten Newtonschen Gesetzes. Vielmehr definiert es, was unter „Änderung des Systemzustandes“ zu verstehen sei, nämlich die Änderung der Geschwindigkeit $d\mathbf{x}/dt$, nicht etwa höhere Ableitungen der Geschwindigkeit.

Die Formulierung des ersten Newtonschen Gesetzes führt nun sofort zu einer neuen Symmetrie, denn es sind Ruhe und gleichförmig geradlinige Bewegung gleichberechtigt. Das führt zu den „Galileiboosts“ als Symmetrietransformationen:

$$t' = t, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t \text{ mit } \mathbf{v} = \text{const}, \quad \mathbf{F}' = \mathbf{F}, \quad m' = m. \quad (7)$$

Einsetzen in (6) zeigt, daß das zweite Newtonsche Gesetz tatsächlich forminvariant gegenüber Galileiboosts ist. Diese Betrachtung zeigt aber auch, daß das zweite Newtonsche Gesetz nicht aus dem ersten folgt, denn jedes Kraftgesetz, das x und dx/dt nicht enthält, ist kovariant gegenüber Galileiboosts.

Die volle Invarianzgruppe der Newtonschen Mechanik, die Galileigruppe Gal^1 , ist das Erzeugnis aus allen bisher betrachteten Transformationen:

- Zeittranslationen (1 reeller Parameter, isomorph zu $(\mathbb{R}, +)$),
- Raumtranslationen (3 reelle Parameter, isomorph zu $(\mathbb{R}^3, +)$),
- Drehungen (3 reelle Parameter, isomorph zu $\text{SO}(3)$),
- Galileiboosts (3 reelle Parameter, isomorph zu $(\mathbb{R}^3, +)$).

Es soll nicht näher auf die recht komplizierte Struktur der Galileigruppe eingegangen werden. Es handelt sich um ein semidirektes Produkt. Wir benötigen für die Behandlung des Noethertheorems unten nur die Einparameteruntergruppen der Galileigruppe, so daß die Kenntnis der eben genannten erzeugenden Gruppen bereits ausreicht.

Wir nehmen weiter an, daß sich die Kraft als Gradient eines Potentials $V : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ darstellen läßt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

Dann läßt sich die Newtonsche Bewegungsgleichung (6) durch ein Variationsprinzip formulieren:

¹dies ist keine allgemein etablierte Bezeichnung für die Galileigruppe!

Das Hamiltonsche Prinzip

Ein Massepunkt bewegt sich stets so, daß das Wirkungsfunktional

$$A(\mathbf{x}; t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \quad (9)$$

mit der Lagrangefunktion

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}, t) \quad (10)$$

extremal wird, wobei Anfangs- und Endpunkt der Bahn fixiert sind („erzwungene Randwerte“).

Die Lösung dieser Variationsaufgabe läßt sich durch die Euler-Lagrangegleichungen des Systems ausdrücken. Dazu führen wir eine Variation bzgl. \mathbf{x} aus. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \delta \dot{\mathbf{x}} \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right] \delta \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (11)$$

Dabei haben wir benutzt, daß wegen $\delta t = 0$ die Variationsbildung und Zeitableitung vertauscht werden dürfen und haben partiell integriert. Der Randterm verschwindet, weil an den Rändern $\delta \mathbf{x}$ definitionsgemäß verschwindet (feste Randwerte). Da $\delta \mathbf{x}$ willkürlich ist, muß nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung die Klammer im Integranden verschwinden. Es gilt also für die Kurve, die das Wirkungsfunktional extremal macht

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0. \quad (12)$$

Dies sind die *Euler-Lagrangegleichungen der Variationsrechnung*. Setzt man die oben gegebene Lagrangefunktion in diese Gleichung ein, folgen tatsächlich die Newtonschen Bewegungsgleichungen für den Massepunkt, d.h. sie lassen sich durch das Hamiltonsche Prinzip formulieren.

Der Vorteil der Variationsformulierung mittels des Hamiltonschen Prinzips ist, daß L eine Invariante bzgl. $SO(3)$ (also ein Skalar) ist und somit auch das Wirkungsfunktional. Da sich dieses Funktional in beliebigen Parametrisierungen des Raumes ausdrücken läßt und sich nichts an der Herleitung der Euler-Lagrangegleichungen ändert, gelten sie für beliebige generalisierte Lagekoordinaten q :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (13)$$

Das Hamiltonsche Prinzip führt also zu einer Formulierung der Mechanik, die kovariant gegenüber beliebigen Punkttransformationen ist. Es sei ferner erwähnt, daß das Hamiltonsche Prinzip unmittelbar auf die Bewegung auf beliebigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten übertragen werden kann.

3.1 Grundlagen zur Beschreibung kontinuierlicher mechanischer Systeme

Aus der statistischen Physik wissen wir, daß im thermodynamischen Limes (also bei hohen Teilchenzahlen) die makroskopische Materie als Kontinuum beschrieben werden kann. Wenn also im folgenden von der Differentialrechnung Gebrauch gemacht wird, sollen immer „makroskopische Differentiale“ verstanden werden, also solche Größen, die auf makroskopischen Längen-

bzw. Zeitskalen klein, auf mikroskopischen Skalen aber groß sind. Die Volumenelemente bei der Berechnung von Dichtegrößen müssen z.B. noch sehr viele die Materie konstituierende Moleküle bzw. Atome enthalten. Wir wollen hier jedoch nicht den Weg von der mikroskopisch-statistischen Beschreibung gehen (vgl. etwa [Rei65] oder [LP81]), was die detaillierte Betrachtung der kinetischen Gleichungen und deren Näherungen erfordert, sondern die auf der Invariantentheorie beruhenden Prinzipien der Punktmechanik auf die Systeme mit kontinuierlich vielen Freiheitsgraden übertragen.

Der Beschreibung der Punktsysteme steht der folgende Formalismus, der auf den sogenannten Lagrangekoordinaten beruht nahe². Wir stellen uns das System aus Volumenelementen zusammengesetzt vor. Zur Zeit $t = 0$ (willkürliche Anfangszeit) nehmen diese Volumenelemente ein bestimmtes Gebiet V_0 des \mathbb{R}^3 ein. Dieses Gebiet wird mit den Lagrangekoordinaten \mathbf{x}_0 parametrisiert (kartesische Koordinaten). Auf diese Weise wird jedem Volumenelement des kontinuierlichen Systems eine „Marke“ angeheftet, vergleichbar mit dem Zählindex, der die Massenpunkte eines Systems aus endlich vielen Massenpunkten durchzählt.

Die Kinematik des Systems läßt sich nun weitgehend aus der Punktmechanik übertragen. Die Bewegung des Systems wird durch die Angabe der Position jedes Massenelementes zur Zeit t beschrieben:

$$\mathbf{x} : V_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : (\mathbf{x}_0, t) \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t). \quad (14)$$

Wir bezeichnen im folgenden alle Größen, die sich auf Lagrangekoordinaten \mathbf{x}_0 beziehen, mit einem Index 0 (außer natürlich dem soeben eingeführten Lagevektor \mathbf{x}). Wir gehen im folgenden davon aus, daß die Funktion \mathbf{x} bzgl. Raum und Zeit ein Diffeomorphismus ist. Das bedeutet physikalisch, daß etwa das Zerreißen des Fluids ausgeschlossen wird. Es ist klar, daß man sich von dieser recht rigiden Forderung durch Übergang zu verallgemeinerten Funktionen und Ableitungen (Distributionen) befreien kann sofern dies erforderlich ist. Halten wir hier der Einfachheit halber an der Annahme des Diffeomorphismus fest, sehen wir sofort, daß die Koordinaten \mathbf{x} , die *Eulerkoordinaten*³ genausogut geeignet sind, unser System zu beschreiben, wie die Lagrangekoordinaten. Ein Diffeomorphismus beschreibt nämlich lediglich eine Punkttransformation.

Für die Geschwindigkeit des Volumenelementes, das sich zur Zeit $t = 0$ an der Stelle $\mathbf{x}_0 \in V_0$ befunden hat, ergibt sich sofort

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{v}_0 : V_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (15)$$

Die Masse eines Volumenelements, das sich zur Zeit $t = 0$ im Punkt $\mathbf{x}_0 \in V_0$ befunden hat, berechnet sich zur Zeit t über die Dichtefunktion

$$\rho_0 : V_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (\mathbf{x}_0, t) \mapsto \rho_0(\mathbf{x}_0, t) \quad (16)$$

zu $\rho_0(\mathbf{x}_0, t)d^3\mathbf{x}$. Dabei ist $d^3\mathbf{x}$ das Volumenelement zur Zeit t und wird von den Lagekoordinaten \mathbf{x} des betreffenden Volumenelements aufgespannt. Es gilt nun aber, wie von der Transformationsformel für Integrale mehrerer Veränderlicher bekannt ist,

$$d^3\mathbf{x} = J_0(\mathbf{x}_0, t)d^3\mathbf{x}_0 \text{ mit } J_0(\mathbf{x}_0, t) = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \right). \quad (17)$$

J_0 ist die *Jacobideterminante* von \mathbf{x} bzgl. \mathbf{x}_0 .

²Historisch geht die Behandlung der kontinuierlichen Systeme aber bekanntlich auf Euler zurück, so auch die Beschreibung mit Lagrangekoordinaten.

³die übrigens tatsächlich von Euler stammen

3.2 Umrechnung zwischen Euler- und Lagrangekoordinaten

Geht man von Lagrange- zu Eulerkoordinaten über, erhält man Feldgleichungen für die Bewegung des Systems (um ihre genaue Form soll es im folgenden gehen). Um zu diesen Feldgleichungen zu gelangen, müssen wir die Lagrangekoordinaten in die Eulerkoordinaten umrechnen. Die Lagrangekoordinaten eignen sich aber besser für einige Rechnungen, bei denen Zeitableitungen zu bilden sind, weil das Gebiet V_0 (die Anfangskonfiguration des Systems) zeitlich konstant ist.

Die Erhaltung der Masse

Es ist bezeichnend für die klassische Mechanik, daß der Erhaltungssatz der Masse an dieser Stelle als empirisches Faktum eingeführt werden muß und nicht wie die anderen Erhaltungssätze unten aus einer Symmetrie der Theorie folgt. Dieses Problem kann man von zwei Seiten aus erklären:

- (1) Innerhalb der Physik, die auf dem Newtonschen Raum-Zeit-Kontinuum beruht, folgt die Erhaltung der Masse aus der Phaseninvarianz der quantenmechanischen Zustände im Hilbertraum⁴. Diese innere Symmetrie der Quantentheorie wird naturgemäß in der klassischen Mechanik nicht sichtbar, weil sie eben diese Phase nicht kennt (vgl. [LL77]).
- (2) In der relativistischen Physik zeigt sich, daß die Masse nicht erhalten ist. Vielmehr subsumiert sie sich unter das allgemeine Prinzip der Energieerhaltung, das aus der Translations-symmetrie in der Zeit folgt (s.u.). Die relativistische Quantentheorie hatte demgemäß auch Probleme mit der Deutung des Hilbertraums, denn aus der Phaseninvarianz folgt in diesem Falle zwar ebenfalls ein Erhaltungssatz, aber für eine Größe, die nicht positiv definit ist. Die Eichtheorie der Elektrodynamik zeigt, daß diese Größe nicht der Massen- sondern der Ladungsdichte entspricht. Die Erklärung ist, daß bei relativistischen Energien der Teilchen durch Erzeugung und Vernichtung von Teilchen-Antiteilchenpaaren die Massenerhaltung verletzt wird (etwas ungenau gesagt wird kinetische Energie in Masse umgewandelt und umgekehrt).

Doch zurück zur klassischen Kontinuumsmechanik, in der wir die Erhaltung der Masse jedes Volumenelementes als empirisches Faktum etablieren müssen. Es gilt wegen der Bedeutung von ρ_0 als Massendichte unter beliebigen Variationen $\delta \mathbf{x}$ der Eulerschen Lagekoordinaten

$$0 = \delta(\rho_0 d^3 \vec{x}) = \delta(\rho_0 J_0) d^3 \mathbf{x}_0 \Rightarrow \delta(\rho_0 J_0) = 0. \quad (18)$$

Nun ist

$$\delta(\rho_0 J_0) = \delta \rho_0 J_0 + \rho_0 \delta J_0 = 0. \quad (19)$$

Wir berechnen die Variation der Funktionaldeterminante am einfachsten, wenn wir zur mathematisch formalen Definition der Variation zurückgehen. Es sei also

$$\xi : V_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : (\mathbf{x}_0, t, \epsilon) \mapsto \xi(\mathbf{x}_0, t) \quad \delta \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \xi(\mathbf{x}_0, t, \epsilon) \right|_{\epsilon=0}. \quad (20)$$

Dann ist wieder nach Definition der Variation

$$\delta J_0 = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \det \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}_0} \right|_{\epsilon=0}. \quad (21)$$

⁴genauer: man rechnet in Wirklichkeit auf einem projektiven Strahlraum des zugrundeliegenden Hilbertraums

Eine Determinante wird nun abgeleitet, indem man jede Zeile einzeln ableitet und die Summe aus den so entstandenen Determinanten bildet. Seien dazu A_{jk} die Adjunkten der Jacobimatrix, also

$$A_{jk} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_{0k}} = J_0 \delta_{ij} \Rightarrow A_{ik} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_{0k}} = \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right) A_{ik} \frac{\partial x_j}{\partial x_{0k}} = J_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \epsilon} \right). \quad (22)$$

Wie aus der Rechnung hervorgeht, ist dabei die Divergenz bzgl. der Eulerkoordinaten zu bilden. Setzt man hierin $\epsilon = 0$, folgt schließlich für die gesuchte Variation

$$\delta J_0 = \left. \frac{\partial J_0}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = J_0 \operatorname{div}(\delta \mathbf{x}). \quad (23)$$

Insbesondere folgt für die durch die Bewegung erzeugte zeitliche Änderung

$$\frac{\partial J_0}{\partial t} = J_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) = J_0 \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (24)$$

Dabei ist $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}; t), t)$ die auf Eulerkoordinaten umgerechnete Geschwindigkeit.

Die Massenerhaltungsgleichung (18) drückt sich damit nun wie folgt aus:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 J_0) = \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial J_0}{\partial t} = J_0 \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} \right). \quad (25)$$

Wir rechnen dies nun vollständig in Eulerkoordinaten um. Es gilt

$$\rho_0(\mathbf{x}_0, t) = \rho(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) \Rightarrow \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho. \quad (26)$$

Im folgenden bezeichnen wir diese Zeitableitung einer von Eulerkoordinaten abhängigen Größe mit "d/dt". Es handelt sich um die sogenannte *substantielle Zeitableitung*, weil die Zeitableitung bzgl. der Bewegung eines individuellen Volumenelements des Systems gebildet wird:

$$\frac{d\rho}{dt} := \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho. \quad (27)$$

Die Kontinuitätsgleichung schreibt sich demnach in Eulerkoordinaten zu

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (28)$$

Dies ist eine lokale Erhaltungsgleichung, wie sie aus der Feldtheorie bekannt ist. In Eulerkoordinaten erreicht man allgemein eine Beschreibung des Systems, die den Charakter einer Feldtheorie annimmt.

Für das folgende benötigen wir noch die Variation integraler Größen. Sei also $f : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige von den Eulerkoordinaten abhängige Größe (im folgenden bezeichnet V das vom System eingenommene Volumen zur Zeit t , also das Gebiet, das die Eulerkoordinaten parametrisieren). Weiter sei $f_0 : V_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dieselbe Funktion bzgl. Lagrangekoordinaten. Dann gilt wegen (18)

$$\begin{aligned} \delta \int_V d^3 \mathbf{x} \rho f &= \delta \int_{V_0} d^3 \mathbf{x} \rho_0 f_0 J_0 = \int_V d^3 \mathbf{x} \rho \delta f \Rightarrow \\ \delta \int_V d^3 \mathbf{x} \rho f &= \int_V d^3 \mathbf{x} \rho \delta f. \end{aligned} \quad (29)$$

Für die (substantielle) Zeitableitung einer solchen integralen Größe gilt insbesondere

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3 \mathbf{x} \rho f = \int_V d^3 \mathbf{x} \rho \frac{df}{dt}. \quad (30)$$

3.3 Anwendung des Hamiltonschen Prinzips auf inkompressible Medien

Für ein inkompressibles Medium schreiben wir die Lagrangefunktion als Volumenintegral einer *Lagrangedichte*:

$$L = \int_V d^3\mathbf{x} \left(\frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 - w \right). \quad (31)$$

Dabei ist w das Potential der Kräfte pro Volumen als Funktion der Eulerkoordinaten und der Zeit. Die Inkompressibilitätsforderung verlangt nun, daß die Dichte des Mediums sowohl zeitlich als auch räumlich konstant ist, und die Kontinuitätsgleichung (14) geht über in

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (32)$$

Das Wirkungsfunktional ist nun durch

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3\mathbf{x} \left(\frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 - w \right) \quad (33)$$

gegeben. Die Variationsvorschrift des Hamiltonschen Prinzips verlangt nun, daß virtuelle Verrückungen an den Eulerkoordinaten $\delta\mathbf{x}$ anzubringen sind, die bei $t = t_1$ bzw. $t = t_2$ verschwinden. Die durch (32) gegebene Inkompressibilitätsbedingung läßt sich nun aufgrund von (18) und (23) als Zwangsbedingung für die Variation $\delta\mathbf{x}$ ausdrücken:

$$\operatorname{div}(\delta\mathbf{x}) = 0. \quad (34)$$

Diese rein kinematische Zwangsbedingung läßt sich nun mit der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren behandeln. Dazu bilden wir zunächst die Variation des Wirkungsfunktionals (33):

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V [\rho \mathbf{v} \delta \mathbf{v} - \delta w] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3\mathbf{x} \left(-\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla w \right) \delta \mathbf{x}. \quad (35)$$

Dabei haben wir die Vertauschbarkeit von virtueller Verrückung und Zeitableitung (wegen $\delta t = 0$) benutzt und partiell integriert, wobei der Randterm wegen des Verschwindens der Verrückung an den Enden des Zeitintervalls herausfällt. Nun darf man aber aus dem Hamiltonschen Prinzip nicht auf das Verschwinden der Klammer im Integranden schließen, weil die Variation $\delta\mathbf{x}$ nicht beliebig ist, sondern durch die Zwangsbedingung (34) eingeschränkt ist. Wir führen daher einen Lagrangeparameter λ für die Zwangsbedingung ein und verlangen

$$\delta A_\lambda = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3\mathbf{x} \left[\delta \mathbf{x} \left(-\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla w \right) + \lambda \operatorname{div}(\delta \mathbf{x}) \right] = 0. \quad (36)$$

Da wir nun mit dem Lagrangeparameter einen weiteren Freiheitsgrad in das Variationsprinzip eingeführt haben, der es gestattet, die Zwangsbedingung als zusätzliche Gleichung zu erfüllen, können wir nun annehmen, daß die Variation $\delta\mathbf{x}$ frei ist. Um zu Bewegungsgleichungen zu gelangen, ist noch der Divergenzterm bzgl. des Raumintegrals partiell zu integrieren:

$$\delta A_\lambda = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_V d^3\mathbf{x} \left[-\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla (w + \lambda) \right] + \int_{\partial V} d\mathbf{A}(\mathbf{x}) \lambda \delta \mathbf{x} \right\} = 0. \quad (37)$$

Da das Raumintegral das Innere des Systems, das Flächenintegral dessen Rand betrifft, müssen beide für sich verschwinden. Aus dem Verschwinden des Volumenintegrals folgen die *Eulerschen Bewegungsgleichungen* der idealen Flüssigkeit:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla(w + \lambda). \quad (38)$$

Der Lagrangeparameter erscheint also als Potential einer weiteren Kraft, die von der Inkompressibilität der Flüssigkeit erzwungen wird (Zwangskraft). Wie wir weiter unten noch sehen werden, läßt sich λ mit dem *Druck* des Fluids identifizieren, also $\lambda = p$. Ausführung der substantiellen Zeitableitung gemäß (27) ergibt

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = \mathbf{F} - \nabla p \text{ mit } \mathbf{F} = -\nabla w, \quad (\mathbf{v} \nabla) = v_i \partial_i. \quad (39)$$

Wir haben nun noch das Randintegral im Variationsprinzip zum Verschwinden zu bringen. Dies liefert uns Randbedingungen für den Druck.

Wir betrachten die folgenden Fälle:

- (1) Das Fluid wird von einer festen Wand begrenzt.

Dann ist $\mathbf{n} \delta \mathbf{x}|_{\partial V} = 0$ (wobei \mathbf{n} der Normalenvektor an ∂V sein soll), und es ergibt sich keine weitere Randbedingung an den Druck. Es ist aber klar, daß diese Randbedingung von der Geschwindigkeit selbst erfüllt werden muß: $\mathbf{n} \mathbf{v}|_{\partial V} = 0$.

- (2) Das Fluid bildet eine freie Oberfläche.

Bei einer Oberfläche gibt es an $\delta \mathbf{x}$ am Rande des Fluids keine Beschränkungen, und es muß

$$p|_{\partial V} = p_0 \quad (40)$$

gelten, damit das Flächenintegral für alle $\delta \mathbf{x}$ verschwindet.

- (3) Tropfbare nicht mischbare Flüssigkeiten grenzen aneinander.

Dann sei $\delta \mathbf{x}_1$ die Verrückung des ersten Fluids, $\delta \mathbf{x}_2$ die des zweiten. Zusätzlich zum rein kinematisch bedingten Druck tritt noch ein *Kohäsionsdruck* N zwischen den Fluiden auf. Wegen des geforderten Zusammenhangs der Trennfläche zwischen den beiden Fluiden, muß weiter $\mathbf{n} \delta \mathbf{x}_1 = -\mathbf{n} \delta \mathbf{x}_2$ sein (Kontaktbedingung). Dies in das Randintegral eingesetzt ergibt, daß

$$[(p_1 - p_0) - (p_2 - p_0)]_{\partial V} = (p_1 - p_2)|_{\partial V} = N \quad (41)$$

sein muß, d.h. die Drücke weisen an der Oberfläche einen Sprung von der Größe des Kohäsionsdrucks auf.

3.4 Kompressible Fluide

Bei den kompressiblen Fluiden kann der Druck nicht als Lagrangeparameter einer Zwangsbedingung erklärt werden. Mathematisch folgt das sofort daraus, daß die Massenerhaltung sich nicht mehr als rein kinematische Zwangsbedingung formulieren läßt, sondern durch die Kontinuitätsgleichung (28) gegeben ist. Das ist auch physikalisch klar, denn es stellen hier die Dichte ρ und der Druck p *thermodynamische Zustandsgrößen* dar.

Die Lagrangedichte enthält nun auch die innere Energie, die eine Funktion der thermodynamischen Zustandsgrößen ist. Wir wollen hier nur den einfachsten Fall behandeln, bei dem keine Wärmeleitung oder -strahlung (oder ähnliche Transportphänomene) auftreten. Im folgenden befindet sich das System stets im thermodynamischen Gleichgewicht, so daß also kein Wärmeaustausch stattfindet. Das heißt für die Variation der *Entropie* gilt

$$\delta S = 0. \quad (42)$$

Wir beziehen nun die extensiven Größen stets auf die Masseneinheit, so auch die Lagrangedichte:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \rho). \quad (43)$$

Die Dichte ρ wird hier extra als Variable eingeführt, weil sie eine weitere Systemgröße darstellt. Deren Variation wird aber durch die Kontinuitätsgleichung (28) (bzw. in Lagrangekoordinaten geschrieben (18)) eingeschränkt. Wir schreiben nun der besseren Übersicht wegen das Wirkungsfunktional als Integral über die Lagrangekoordinaten:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{V_0} d^3\mathbf{x}_0 \rho_0 J_0. \quad (44)$$

Unter Verwendung von (29) folgt

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{V_0} d^3\mathbf{x}_0 J_0 \delta \mathcal{L}_0 = \int dt \int_{V_0} \rho_0 J_0 \left[\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_0} \delta \mathbf{v}_0 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_0} \delta \rho_0 \right]. \quad (45)$$

Aus (18) erhält man unter Verwendung von (23)

$$J_0 \delta \rho_0 = -J_0 \rho_0 \operatorname{div}(\delta \mathbf{x}). \quad (46)$$

Dies in die Variation eingesetzt, beim Integrieren zu Eulerkoordinaten übergegangen, ergibt nach partieller Integration

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_V d^3\mathbf{x} \rho \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\rho^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \right) \right] \delta \mathbf{x} + \int_{\partial V} d\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rho^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \delta \mathbf{x} \right\}. \quad (47)$$

Wie im inkompressiblen Fall müssen auch hier Volumen- und Randintegral für sich verschwinden. Damit folgt die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\rho^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \right) = 0. \quad (48)$$

Aus dem Oberflächenanteil ergeben sich wieder Randbedingungen; die Bewegungsgleichungen sind unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung (28) zu lösen.

Wir schreiben die Bewegungsgleichungen noch explizit auf. Die spezifische Lagrangedichte ist

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - u - \epsilon. \quad (49)$$

Dabei ist $u = u(\mathbf{x}; t)$ das Potential der äußeren Kräfte pro Masseneinheit, $\epsilon(s, \rho)$ die innere Energie pro Masseneinheit und s die Entropie pro Masseneinheit. Nach dem ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik für Gleichgewichtsprozesse gilt

$$d\epsilon = T ds - p dV = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} = \frac{p}{\rho^2}. \quad (50)$$

Dabei haben wir die oben vorausgesetzte Adiabasie der Prozesse, also $ds = 0$ berücksichtigt. Setzen wir dies in die Euler-Lagrangegleichung (48) ein, finden wir

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla u - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (51)$$

Das ist die *Eulersche Gleichung* für das kompressible Fluid, die mit der Gleichung für das inkompressible Fluid formal übereinstimmt. Es sei nur noch einmal betont, daß hier die eingehenden physikalischen Größen Dichte und Druck verschiedenen Charakter haben: Im inkompressiblen Fall war die Dichte eine reine Materialkonstante und der Druck das Potential einer die Inkompressibilitätsbedingung gewährleistende Zwangskraft; im kompressiblen Fall hingegen sind Druck und Dichte thermodynamische Zustandsgrößen.

Die Eulerschen Gleichungen sind in beiden Fällen durch Randbedingungen ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ am Rande und die oben angegebenen Bedingungen an den Druck) sowie durch die Kontinuitätsgleichung (bzw. Inkompressibilitätsbedingung) zu ergänzen. Im Falle des kompressiblen Fluids ist auch noch die thermodynamische Zustandsgleichung $p = p(\rho; T)$ wobei $S = \text{const.}$ (kein Wärmetransport!) gesetzt wird, zu berücksichtigen.

Mit den hydrodynamischen Gleichungen mit Wärmetransport beschäftigt sich z.B. [LL87].

4 Das Noethertheorem

Wir beschäftigen uns weiter mit dem Fall des kompressiblen idealen Fluids. Wir wollen jetzt die Bedeutung von Symmetrien auf die Bewegung des Systems untersuchen. Zunächst müssen wir dazu den Begriff der Symmetrie genauer formulieren:

4.1 Äquivalente Lagrangedichten

Zwei Lagrangedichten \mathcal{L} und \mathcal{L}' heißen äquivalent, wenn $\delta(A - A') = 0$, wobei natürlich Anfangs- und Endzeiten t_1 und t_2 der Teilchenbahnen und das Fluidvolumen V festgehalten werden. Dann haben \mathcal{L} und \mathcal{L}' dieselben Bewegungsgleichungen zur Folge. Sei also mit $A'' = A - A' : \delta A'' = 0$. Nun gilt

$$A'' = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3\mathbf{x} \rho \mathcal{L}'' \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}'' = \mathcal{L}''(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t). \quad (52)$$

Variation im Sinne des Hamiltonschen Prinzips führt wegen (29) auf

$$\delta A'' = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3\mathbf{x} \rho \delta \mathcal{L}'' . \quad (53)$$

Damit nun $\delta A'' \equiv 0$, muß nach dem Hamiltonschen Prinzip

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3\mathbf{x} \rho \delta \mathcal{L}'' = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \int_V d^3\mathbf{x} \rho \tilde{\Omega} \delta \mathbf{x} \Rightarrow \mathcal{L}'' = \frac{d\Omega}{dt} \quad \text{mit} \quad \Omega = \Omega(\mathbf{x}, t) = \tilde{\Omega} \delta \mathbf{x} \quad (54)$$

sein, denn beim Hamiltonschen Prinzip ist $\delta \mathbf{x}(t_1) = \delta \mathbf{x}(t_2) = 0$.

Folglich sind zwei Lagrangedichten äquivalent genau dann, wenn es ein Ω gibt, so daß

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d\Omega}{dt} \quad \text{mit} \quad \Omega = \Omega(\mathbf{x}, t). \quad (55)$$

4.2 Das Noethertheorem

Wir untersuchen die Änderung der Lagrangedichte unter beliebigen Transformationen, deren Gesamtheit eine Liegruppe bilden. Dadurch können wir die Betrachtungen auf den Tangentialraum

am Einselement (also der identischen Transformation) dieser Gruppe, d.h. auf die zu der Gruppe gehörigen Liealgebra beschränken. Anschaulich bedeutet das die Untersuchung des Verhaltens des Wirkungsfunktionals unter „infinitesimalen“ Transformationen.

Wir betrachten die Transformation

$$t \rightarrow t + \delta t, \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \delta \mathbf{x} \text{ mit } \delta t = \delta t(t), \quad (56)$$

beschränken uns also auf Transformationen, bei denen die Zeit sich homogen im Raum transformiert. Das ist für die in Abschnitt 2 betrachtete Galileigruppe bzw. deren erzeugenden Einparameteruntergruppen mehr als ausreichend. Die Transformationen müssen allerdings alle die durch (18) ausgedrückte Kontinuitätsgleichung erfüllen:

$$\delta(\rho_0 J_0) = 0. \quad (57)$$

Daher erhalten wir

$$\delta A = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{V_0} d^3 \mathbf{x} \rho_0 J_0 \mathcal{L}_0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{V_0} d^3 \mathbf{x} \rho_0 J_0 \left[\delta \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_0 \frac{d}{dt}(\delta t) \right]. \quad (58)$$

Der Zusatzterm gegenüber der Variation beim Hamiltonschen Prinzip rührt von der Mitvariation der Zeit her.

Aus demselben Grunde vertauschen Variation und Zeitableitung nicht mehr. Wir müssen also die Variation von $\dot{\mathbf{x}}$ gesondert betrachten:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}_0 &= \frac{\delta(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x})}{\delta(t + \delta t)} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial t} \right] \left[1 - \frac{\partial \delta t}{\partial t} \right] - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Rightarrow \\ \delta \mathbf{v}_0 &= \frac{\partial(\delta \mathbf{x})}{\partial t} - \mathbf{v}_0 \frac{\partial \delta t}{\partial t}. \end{aligned} \quad (59)$$

Aus (18) folgt unter Berücksichtigung von (23)

$$J_0 \delta \rho_0 = -\rho_0 \delta J_0 = -\rho_0 J_0 \operatorname{div}(\delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{v}_0 \delta t), \quad (60)$$

wobei die Divergenz bzgl. der Eulerkoordinaten zu nehmen ist.

Es folgt nun zunächst

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3 \mathbf{x} \rho \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \delta \dot{\mathbf{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \rho \operatorname{div}(\delta \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \delta t) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right)_{\text{exp}} \delta t + \mathcal{L} \frac{\partial \delta t}{\partial t} \right] \quad (61)$$

Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} \int_V d^3 \mathbf{x} \rho^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \operatorname{div}(\delta \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \delta t) &= \int_{\partial V} d\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rho^2 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} (\delta \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \delta t) \right] \\ &\quad - \int_V d^3 \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\rho^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \right] (\delta \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \delta t). \end{aligned} \quad (62)$$

Wir betrachten zunächst Größen, die sich auf das gesamte Fluid beziehen, so daß V das Gesamtvolumen des Fluids ist. Am Rande verschwindet dann ρ und damit das Randintegral.

Eine Symmetrietransformation zeichnet sich nun dadurch aus, daß sie die Bewegungsgleichungen (48) invariant läßt. Gemäß (55) heißt das, daß eine Funktion $\delta\Omega(\mathbf{x}, t)$ existieren muß, so daß

$$\int_V d^3\mathbf{x}\rho \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{x}}\delta\mathbf{x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}} \left(\frac{d\delta\mathbf{x}}{dt} - \dot{\mathbf{x}}\frac{\partial\delta t}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \right)_{\text{exp}} \delta t + \mathcal{L} \frac{\partial\delta t}{\partial t} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \left(\rho^2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} \right) (\delta\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\delta t) + \mathcal{L} \frac{d\delta t}{dt} + \frac{d\delta\Omega}{dt} \right] = 0. \quad (63)$$

Dies ist die Bedingung, daß die infinitesimale Transformation Symmetrietransformation ist (*Noetherbedingung*).

Wir untersuchen nun die Folgerungen, die sich für die Bewegung des Systems ergeben, wenn eine Symmetrietransformation im obigen Sinne vorliegt. Es gelten für die Bewegung die Euler-Lagrangegleichungen (48). Setzt man diese in (63) ein, folgt

$$\int_V d^3\mathbf{x}\rho \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}}\delta\mathbf{x} \right) - \left(\dot{\mathbf{x}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}} - \mathcal{L} \right) \frac{d\delta t}{dt} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \left(\rho^2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} \right) \dot{\mathbf{x}}\delta t + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \right)_{\text{exp}} \delta t + \frac{d\delta\Omega}{dt} \right\} = 0 \quad (64)$$

Wir definieren nun die spezifische Hamiltondichte:

$$\mathcal{H} = \dot{\mathbf{x}} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}} - \mathcal{L}. \quad (65)$$

Es gilt vermöge der Bewegungsgleichung (48)

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \left(\rho^2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} \right) - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \right)_{\text{exp}}. \quad (66)$$

Bei der in dieser Rechnung ausgeführten partiellen Integration fallen die Randintegrale aufgrund des Hamiltonschen Prinzips heraus (d.h. dies wird vom Hamiltonschen Prinzip gefordert und führt auf die oben angeführten Randbedingungen an den Druck). Dies gilt demzufolge (im Gegensatz zur Situation bei (63), wo die Bewegungsgleichung noch nicht gefordert waren) auch für ein Teilvolumen des Fluids, was weiter unten noch wesentlich wird. Des weiteren bemerken wir, daß in der Noetherbedingung der Term mit der Ableitung nach ρ für die weiteren Folgerungen irrelevant ist, da dieser vermöge der Bewegungsgleichung mit den übrigen Termen identisch herausfällt. Ist also (63) erfüllt, folgt

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3\mathbf{x}\rho \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}}\delta\mathbf{x} - \mathcal{H}\delta t + \delta\Omega \right) = 0. \quad (67)$$

Dabei haben wir (30) berücksichtigt.

Damit besagt (67), daß die Größe

$$E(t) = \int_V d^3\mathbf{x} \mathcal{E} = \int_V d^3\mathbf{x}\rho \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}}\delta\mathbf{x} - \mathcal{H}\delta t + \delta\Omega \right) \quad (68)$$

eine Erhaltungsgröße ist, d.h. während der Bewegung des Systems *zeitlich konstant* ist. Das ist die Aussage des Noether-Theorems[Noe18]:

Die Existenz einer Symmetrietransformation eines Hamiltonschen Systems hat die Erhaltung der integralen Größe (68) zur Folge.

Bemerkung:

Geht man zum Hamiltonformalismus über, so lassen sich diese Betrachtungen direkt mit einem der abstrakten Liegruppen- und -algebrentheorie entsprechenden Formalismus durchführen⁵. Dann wird deutlich, daß ein vollständiger Satz voneinander unabhängiger Erhaltungsgrößen durch eine Basis der Liealgebra der größten Symmetriegruppe des Systems gegeben sind.

4.3 Die lokale Form der Erhaltungssätze

Zur Herleitung der lokalen Form der Erhaltungssätze muß über ein beliebiges Teilvolumen ΔV des Fluids integriert werden, so daß der Randterm in (62) nicht verschwindet. Der Erhaltungssatz geht demzufolge in die Form

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} d^3\mathbf{x} \mathcal{E} = - \int_{\partial\Delta V} d\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{j} \text{ mit } \mathbf{j} = -\rho^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} (\delta\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\delta t) \quad (69)$$

über. Dabei ist \mathcal{E} durch (68) gegeben.

Wir führen nun die Zeitableitung auf der linken Seite der Gleichung explizit aus. Dazu gehen wir in der Zwischenrechnung wieder auf Lagrangekoordinaten zurück:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Delta V} d^3\mathbf{x} \mathcal{E} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V_0} d^3\mathbf{x}_0 \mathcal{E}_0 J_0 = \int_{\Delta V_0} d^3\mathbf{x}_0 \left(\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial t} + \mathcal{E}_0 \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} \right) J_0 \\ &= \int_{\Delta V} d^3\mathbf{x} \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \mathcal{E} \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} \right). \end{aligned} \quad (70)$$

Ausführung der substantiellen Zeitableitung ergibt schließlich

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} d^3\mathbf{x} \mathcal{E} = \int_{\Delta V} d^3\mathbf{x} \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}(\dot{\mathbf{x}}\mathcal{E}) \right]. \quad (71)$$

Setzt man dies in (69) ein, folgt

$$\int_{\Delta V} d^3\mathbf{x} \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}(\dot{\mathbf{x}}\mathcal{E} + \mathbf{j}) \right] = 0. \quad (72)$$

Da das für jeden Teil ΔV des Fluidvolumens gilt, folgt

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}(\dot{\mathbf{x}}\mathcal{E} + \mathbf{j}) = 0. \quad (73)$$

4.4 Anwendung auf die Galileigruppe

Wie wir in Abschnitt 2 gesehen haben, ist von jedem abgeschlossenem System zu verlangen, daß es kovariant gegenüber den Transformationen der zehnparametrischen Galileigruppe ist, d.h. die Galileitransformationen müssen für abgeschlossene Systeme Symmetrietransformationen sein. Damit muß es aber nach dem eben behandelten Noethertheorem *zehn Erhaltungsgrößen* geben.

⁵Den Lieklammern entsprechen dabei die Poissonklammern.

(1) Translationen in der Zeit - Energieerhaltung

Wir betrachten Zeittranslationen: $\delta t = \text{const}$, $\delta \mathbf{x} = 0$. Läßt man in (63) den Term mit der Ableitung nach ρ weg (er kürzt sich unter Verwendung der Bewegungsgleichungen von selbst), sieht man, daß \mathcal{L} nicht explizit von der Zeit abhängen darf und $\delta\Omega = 0$ gesetzt werden kann. Nach (73) (wir kehren das Vorzeichen um) sind

$$\mathcal{E} = \rho \mathcal{H} = \rho \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + \epsilon + u \right), \quad \mathbf{j} = -\rho^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \dot{\mathbf{x}} = p \dot{\mathbf{x}} \quad (74)$$

die dazugehörige Dichte und der Strom der Erhaltungsgröße. Der gesuchte Erhaltungssatz lautet also

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 + \rho \epsilon + \rho u \right) + \text{div} \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + h + u \right) \right] \text{ mit } h = \epsilon + \frac{p}{\rho}. \quad (75)$$

Dabei ist h die *Enthalpie* pro Masseneinheit. Aus der Bedeutung der Terme wird klar, daß es sich um die *Energiebilanz* des Fluids handelt.

(2) Translationen im Raum - Impulserhaltung

Wir setzen $\delta t = 0$; $\delta \mathbf{x} = \mathbf{n}x$, das entspricht einer Translation in Richtung \mathbf{n} . Die Noetherbedingung (63) verlangt, daß die Richtungsableitung von \mathcal{L} nach \mathbf{n} verschwindet, und man kann wieder $\delta\Omega = 0$ setzen. Dichte und Strom der Erhaltungsgröße sind durch

$$\mathcal{E} = \rho \mathbf{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \rho \mathbf{n} \mathbf{v}, \quad \mathbf{j} = -\rho^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \mathbf{n} = -p \mathbf{n} \quad (76)$$

gegeben, und der dazugehörige Erhaltungssatz schreibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{n} \mathbf{v}) + \text{div} [\mathbf{v} (\rho \mathbf{n} \mathbf{v}) - p \mathbf{n}] = 0. \quad (77)$$

Sei nun insbesondere $\mathbf{n} = \mathbf{e}_i$. Dann folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \partial_k (\rho v_k v_i - p \delta_{ki}) = 0, \quad (78)$$

wobei δ_{ki} wie üblich das Kroneckersymbol bezeichnet. Der Tensor

$$\Pi_{ki} = \rho v_k v_i - p \delta_{ki} \quad (79)$$

beschreibt also den „Impulsstrom“, d.h. den *Spannungstensor* des Fluids. Damit schreibt sich der *Impulssatz* in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \partial_k \Pi_{ki} = 0. \quad (80)$$

(3) Rotationen - Drehimpulserhaltung

Die Liealgebra $\text{so}(3)$ zur Drehgruppe $\text{SO}(3)$ ist bekanntlich durch die antisymmetrischen reellen 3×3 -Matrizen gegeben, d.h. die zu betrachtende Transformation lautet

$$\delta t = 0, \quad \delta x_k = \delta \omega_{kl} x_l \text{ mit } \delta \omega_{kl} = -\delta \omega_{lk} = \text{const.} \quad (81)$$

Die Noetherbedingung verlangt

$$\delta\omega_{kl}x_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_l} = 0 \Leftrightarrow x_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_l} - x_l\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_k} = 0, \quad (82)$$

und wir können wieder $\delta\Omega = 0$ setzen. Es wird also das Verschwinden des *spezifischen Drehmoments* verlangt. Damit erhalten wir für die Dichte und den Strom der Erhaltungsgröße

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\delta\omega_{kl}\rho(x_lv_k - x_kv_l), \quad j_k = -p\delta\omega_{kl}x_l. \quad (83)$$

Um eine anschaulichere Form des Erhaltungssatzes zu erhalten, betrachten wir nun Drehungen um eine Achse \mathbf{n} . Diese Transformation ist durch

$$\delta\omega_{kl} = \delta\omega\epsilon_{lkm}n_m \quad (84)$$

gegeben. Dabei bezeichnet ϵ_{lkm} den total antisymmetrischen Levi-Civita-Tensor mit $\epsilon_{123} = 1$. Setzt man dies in den Ausdruck für \mathcal{E} und \mathbf{j} ein, erhält man als Erhaltungssatz:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho\mathbf{n}(\mathbf{x} \times \mathbf{v})] + \operatorname{div}[\rho\mathbf{v}(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) - p\mathbf{x} \times \mathbf{n}] = 0 \quad (85)$$

Das ist die *Drehimpulsbilanz* des Systems.

(4) Galileiboosts - Schwerpunktsatz

Ein „infinitesimaler“ Boost ist durch

$$\delta t = 0, \quad \delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{v}t \text{ mit } \delta\mathbf{v} = \text{const} \quad (86)$$

gegeben.

Wir betrachten hier nur den globalen Erhaltungssatz für das gesamte Fluid, da dieser in dem vorliegenden Fall anschaulicher ist als die lokale Bilanz. Hängt \mathcal{L} nicht von \mathbf{x} ab, so ist nach dem Impulssatz

$$\mathbf{p} = \int d^3\mathbf{x}\rho\frac{\mathcal{L}}{\dot{\mathbf{x}}} \quad (87)$$

eine Erhaltungsgröße. Dann reduziert sich (63) auf die Forderung, daß es eine Funktion $\delta\Omega(x;t)$ gibt, so daß

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}}\delta\mathbf{v} + \frac{d\delta\Omega}{dt} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}} = \mathbf{v} \Rightarrow \delta\Omega = -\mathbf{x}\delta\mathbf{v} \quad (88)$$

Das bedeutet nach (67), daß

$$\frac{d}{dt} \int d^3\mathbf{x}\rho(\mathbf{v}t - \mathbf{x})\delta\mathbf{v} = 0 \quad (89)$$

ist, d.h. in Richtung $\delta\mathbf{v}$ bewegt sich der Schwerpunkt

$$\mathbf{s} = \frac{1}{M} \int_V d^3\mathbf{x}\rho\mathbf{x} \text{ mit } M = \int_V d^3\mathbf{x}\rho \quad (90)$$

mit der Geschwindigkeit \mathbf{p}/M geradlinig gleichförmig, also vermöge der Gleichung

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{p}}{M}t + \mathbf{s}_0 \text{ mit } \mathbf{p} = \int_V d^3\mathbf{x}\rho\mathbf{v}. \quad (91)$$

Danksagung

Ich möchte mich herzlich bei Florian Dufey bedanken, der viele Tippfehler und einige Unklarheiten entdeckt hat.

Literatur

- [LL77] L. D. Landau und E. M. Lifshitz, Quantum Mechanics, Pergamon Press, Oxford (1977)
- [LL87] L. D. Landau und E. M. Lifshitz, Fluid mechanics, Pergamon Press, Oxford (1987)
- [LP81] E. Lifshitz und L. Pitaevsii, Physical Kinetics, Pergamon Press, Oxford (1981)
- [Noe18] E. Noether, Invariante Variationsprobleme. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1918) 235
- [Rei65] F. Reif, Fundamentals of statistical and thermal physics, McGraw Hill Book Company, New York (1965)