

# Anwendungen des Lagrange-Formalismus an Beispielen der Oberstufenphysik

Florian Unglaub\*

18. August 2003

\*Facharbeit am Otto-Hahn-Gymnasium Marktredwitz

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>iii</b>
<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Theoretische Grundlagen</b>	<b>2</b>
1.1 Verallgemeinerte Koordinaten . . . . .	2
1.2 Zwangsbedingungen . . . . .	3
1.3 Das Prinzip des kleinsten Wirkung . . . . .	5
1.4 Die Lagrangefunktion . . . . .	5
1.5 Die Euler-Lagrange-Gleichung . . . . .	6
1.6 Zusammenfassung . . . . .	8
<b>2 Anwendung auf ausgewählte Beispiele</b>	<b>9</b>
2.1 Fadenpendel . . . . .	9
2.2 Abrutschendes Seil . . . . .	12
2.3 Trägheitsgesetz . . . . .	14
2.4 Rollpendel . . . . .	16
2.5 Doppelpendel . . . . .	18
<b>A Mathematischer Anhang</b>	<b>23</b>
A.1 Partielle Ableitung . . . . .	23
A.2 Hyperbolische Funktionen . . . . .	23
A.3 Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung . . . . .	24
<b>B Newtonsche Lösungsansätze</b>	<b>26</b>
B.1 Fadenpendel . . . . .	26
B.2 Abrutschendes Seil . . . . .	27
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>28</b>

# Vorwort

Dieses Dokument wurde mit Hilfe des  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  Textsatzsystems von Prof. Donald E. Knuth und der Erweiterung  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}2\text{e}$  sowie dem  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  Makro System der American Mathematical Society erstellt. Zur Erstellung des Literaturverzeichnisses kam das Programm  $\text{BIB}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  zum Einsatz. Sämtliche Abbildungen wurden mit  $\text{M}\text{E}\text{T}\text{A}\text{P}\text{O}\text{S}\text{T}$  erzeugt. Die Graphen wurden mit dem Programm  $\text{M}\text{u}\text{P}\text{A}\text{D}$ <sup>1</sup> erstellt.

---

<sup>1</sup>MuPAD Version 2.0.0  
Copyright (C) 2001 SciFace GmbH  
<http://www.sciface.com>

# Einleitung

Die aus dem Unterricht gewohnten Methoden zum Lösen von Problemen aus der Mechanik stoßen bereits bei komplexeren Problemstellungen an ihre Grenzen. Ich möchte dem Leser in dieser Facharbeit einen anderen Formalismus vorstellen, mit dem auch schwierigere Aufgaben bearbeitet und gelöst werden können: der sog. *Lagrange-Formalismus*. Mit Hilfe dieser neuen Methode können sowohl die aus der Schule bereits bekannten Probleme auf einfachste Art und Weise gelöst werden, als auch die anspruchsvolleren, auf deren genauere Beschreibung im Unterricht nicht eingegangen werden kann. Der wesentliche Unterschied zum Newtonschen Lösungsansatz liegt darin, dass es nicht mehr erforderlich ist, unter Verwendung von Kräften Lösungswege zu erarbeiten, sondern lediglich mit Hilfe der potentiellen und kinetischen Energie, sowie der sog. Zwangsbedingungen zu einem Ergebnis zu kommen. Wir werden also hauptsächlich mit Skalaren anstatt mit Vektoren arbeiten.

Die Facharbeit gliedert sich in zwei große Abschnitte: zum einen sollen dem Leser die nötigen Grundlagen zur Anwendung des Lagrange-Formalismus aufgezeigt werden; zum anderen möchte ich die vermittelten theoretischen Grundlagen anhand einiger ausgewählter Beispiele, zum Teil aus der elften Jahrgangsstufe, anwenden und erläutern. Die Beispiele im zweiten Kapitel sind je nach Schwierigkeitsgrad aufgeführt, angefangen mit dem leichtesten. Im Anhang finden sich notwendige mathematische Voraussetzungen, die nicht Gegenstand des Mathematikunterrichts sind, sowie einige Abbildungen von Versuchsaufbauten und Ergebnissen.

# 1 Theoretische Grundlagen

## 1.1 Verallgemeinerte Koordinaten

Aus der Newtonschen Mechanik ist bereits bekannt, dass es nicht immer sinnvoll ist, die Bewegungsgleichungen in kartesischen Koordinaten aufzustellen. Diese erschweren die Lösung oder machen sie überhaupt erst gar nicht möglich. Beim Lagrange Formalismus gilt es *verallgemeinerte (generalisierte) Koordinaten* zu verwenden. Als generalisierte Koordinaten werden alle Größen bezeichnet, die die Konfiguration eines Systems kennzeichnen. Die Gleichung

$$x_j = x_j(q_1, \dots, q_{3N}, t) \quad (1.1)$$

stellt den Zusammenhang zwischen kartesischen und verallgemeinerten Koordinaten eines  $N$ -Teilchensystems dar. Ein  $N$ -Teilchensystem besitzt  $3N$  unabhängige Koordinaten und  $3N$  *Freiheitsgrade*.

(vgl. [4], S.2)

### Beispiel: Fadenpendel

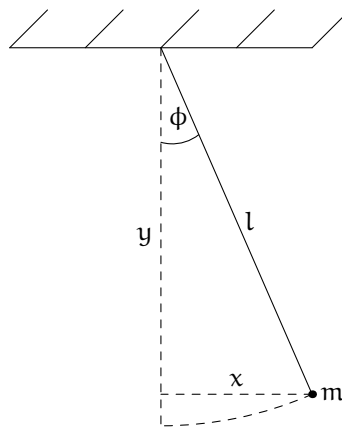


Abbildung 1.1: Fadenpendel

Die Bewegungsgleichungen eines Fadenpendels lassen sich beispielsweise am einfachsten in Polarkoordinaten (Winkel  $\phi$  und Fadenlänge  $l$ ) ermitteln.

Im kartesischen Koordinatensystem lauten die Bewegungsgleichungen eines Fadenpendels folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \end{pmatrix} \\ \vec{r} &= \begin{pmatrix} l \cos \phi(t) \\ l \sin \phi(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wenn man jetzt nach der Zeit  $t$  differenziert (Anwendung der Kettenregel!) erhält man die Geschwindigkeit  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -l\dot{\phi}(t) \sin \phi(t) \\ l\dot{\phi}(t) \cos \phi(t) \end{pmatrix}$$

Und die Beschleunigung lautet:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -l\ddot{\phi}(t) \sin \phi(t) + (\dot{\phi}(t))^2 \cos \phi(t) \\ l\ddot{\phi}(t) \cos \phi(t) + (\dot{\phi}(t))^2 \sin \phi(t) \end{pmatrix}$$

Man bekommt eine wesentlich einfachere Darstellung, wenn die Betrachtung der Bewegung in Polarkoordinaten erfolgt. Um in Polarkoordinaten einen Punkt eindeutig zu bestimmen, wird lediglich der Winkel  $\phi$  und die Länge  $l$  des Pendels benötigt. Man erhält als Koordinate eines Punktes auf dem Kreisbogen  $b$ :

$$x = l\phi(t) \tag{1.2}$$

Analog dazu Geschwindigkeit  $v$  und Beschleunigung  $a$ :

$$\dot{x} = v = l\dot{\phi}(t) = l\omega \tag{1.3a}$$

$$\ddot{x} = a = l\ddot{\phi}(t) = l\dot{\omega} \tag{1.3b}$$

## 1.2 Zwangsbedingungen

Unter *Zwangsbedingungen* versteht man geometrische Einschränkungen, denen ein System unterliegt. Dies kann zum Beispiel ein Faden sein (Fadenpendel) oder eine Aufhängung.

$k$  *Zwangsbedingungen* (Nebenbedingungen) reduzieren die Anzahl der Freiheitsgrade auf  $3N - k$ , d.h. dass nun  $3N - k$  unabhängige Koordinaten existieren. Trotzdem wird der Rechenweg erschwert, da die Zwangsbedingungen nun in den Bewegungsgleichungen vorkommen.

Wenn Zwangsbedingungen vorliegen, lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen nicht mehr

$$m \cdot \ddot{x} = F,$$

sondern

$$m \cdot \ddot{x} = F + Z. \quad (1.4)$$

Die Folge daraus ist, dass die  $3N$  Bewegungsgleichungen ein unterbestimmtes Gleichungssystem darstellen, d.h. dass mehr Unbekannte ( $3N$ ) als Gleichungen ( $3N - k$ ) vorhanden sind. Durch das Einsetzen der  $k$  Zwangsbedingungen reduziert sich die Zahl der Unbekannten auf  $3N - k$ .

(vgl. [4], S. 6-8)

### Beispiel: Rollpendel

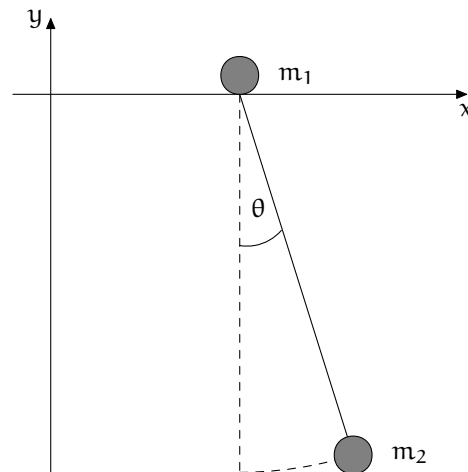


Abbildung 1.2: Rollpendel

Durch die Schwingung von  $m_2$  wird  $m_1$  mitbewegt;  $m_1$  soll sich reibungsfrei auf der  $x$ -Achse bewegen. Aus Gleichung 1.4 folgt:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 &= Z_{1x} & m_1 \cdot \ddot{y}_1 &= Z_{1y} - m_1 \cdot g \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 &= Z_{2x} & m_2 \cdot \ddot{y}_2 &= Z_{2y} - m_2 \cdot g \end{aligned}$$

Die Masse  $m_1$  unterliegt einem Zwang, einer geometrischen Einschränkung. Sie kann sich nur in horizontaler Richtung bewegen (im Experiment durch Auffädeln möglich). Die Masse  $m_2$  wird durch die Aufhängung eingeschränkt. Offensichtlicherweise gilt:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2)^2 &= l^2 \quad (\text{Satz des Pythagoras}) \end{aligned}$$

Wir können daraus schließen, dass nur zwei Koordinaten unabhängig sind, nämlich  $x_1$  und  $\phi$ . Wir wählen beide als unabhängige generalisierte Koordinaten. Die sog. *Transformationsgleichungen* geben die restlichen Koordinaten in Abhängigkeit von  $x_1$  und  $\phi$  an:

$$x_2 = x_1 + l \sin \phi \quad y_2 = -l \cos \phi.$$

Unter Verwendung der Transformationsgleichungen erhalten wir:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = Z_{1x}$$

$$m_1 \cdot g = Z_{1y}$$

$$m_2(\ddot{x}_1 + l\ddot{\phi} \cos \phi - l\dot{\phi}^2 \sin \phi) = Z_{2x}$$

$$m_2(l\ddot{\phi} \sin \phi + l\dot{\phi}^2 \cos \phi + g) = Z_{2y}$$

(vgl. [4], S.9, 10)

### 1.3 Das Prinzip des kleinsten Wirkung

Die allgemeinste Formulierung der Bewegung eines mechanischen Systems ist durch das *Prinzip des kleinsten Zwangs* oder *Prinzip der kleinsten Wirkung* möglich.

Ein mechanisches System wird durch die Funktion  $L(q, \dot{q}, t)$  vollständig beschrieben. Es bewegt sich zwischen zwei Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  immer so, dass

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad i \in \{1, \dots, 3N - k\} \quad (1.5)$$

den kleinstmöglichen Wert annimmt, also minimal wird.  $S$  wird als *Wirkung* bezeichnet und  $L$  als *Lagrangefunktion*.

(vgl. [5], S. 2)

### 1.4 Die Lagrangefunktion

Die Lagrange Funktion ist wie folgt definiert:

$$L := T - U. \quad (1.6)$$

Mit  $U$  wird die potentielle, mit  $T$  die kinetische Energie bezeichnet.

Die kinetische Energie lautet:

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 \quad i \in \{1, \dots, 3N - k\}, \quad (1.7)$$

Man darf also die kinetischen Energien der generalisierten Koordinaten einfach addieren. Um die potentielle Energie zu berechnen, muss man lediglich über die Kraft  $\vec{F}$  entlang des Weges  $\vec{r}$  integrieren:

$$U = \int \vec{F}_i d\vec{r}_i \quad i \in \{1, \dots, 3N - k\}, \quad (1.8a)$$

oder wenn man einfach nur die Beträge betrachtet:

$$U = \int F_i dr_i \quad i \in \{1, \dots, 3N - k\}. \quad (1.8b)$$

(vgl. [4], S. 26, 27)

### Beispiel: Gravitationsfeld der Erde

Das einfachste Beispiel für das Potential ist der Ausdruck  $U = mgh$ . Dabei wird das Gravitationsfeld der Erde nicht als radial, also  $U(r) \sim \frac{1}{r^2}$  (Gravitationskraft), sondern als homogen betrachtet. Man nimmt hier also an, dass die Kraft  $\vec{F}$  immer den gleichen Betrag und die gleiche Richtung hat. Für kurze Distanzen ist diese Näherung ziemlich genau und für die meisten Zwecke ausreichend. Die potentielle Energie eines Körpers im Gravitationsfeld lautet nach 1.8b also:

$$U = \int_{r_1}^{r_2} F dr = F \cdot (r_2 - r_1) = mgh, \quad F = \text{const.}$$

Die Lagrange Gleichung für einen Körper, der sich im homogenen Schwerfeld der Erde bewegt ergibt sich nach 1.6:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - mgx. \quad (1.9)$$

## 1.5 Die Euler-Lagrange-Gleichung

Aus dem *Prinzip des kleinsten Zwangs* lässt sich mit Hilfe der Variationsrechnung die sog. *Euler-Lagrange-Gleichung* herleiten, diese würde jedoch weit über die Intention dieser Facharbeit hinausreichen. Der Vollständigkeit halber ist die Herleitung im Anhang aufgeführt (siehe Anhang A.3).

Die Euler-Lagrange Gleichung lautet:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i \in \{1, \dots, 3N - k\} \quad (1.10)$$

Durch Einsetzen der Lagrangefunktion erhält man nun ein Gleichungssystem, dessen Lösung ein System von Differentialgleichungen ist. Um die Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems zu erhalten muss man lediglich noch dieses Gleichungssystem lösen.

Man nennt diese Lagrangefunktion und -gleichung auch *Lagrangegleichungen 2. Art*. Sie gelten nur für Kräfte, die aus einem Potential abgeleitet werden (siehe Gleichungen 1.7, 1.8).

(vgl. [2], S. 27).

### Beispiel: Gravitationsfeld der Erde

Ich möchte nun das Beispiel 3 aus 1.4.1 wieder aufgreifen um zu verdeutlichen. Die Lagrangefunktion ist durch Gleichung 1.9 gegeben. Jetzt setzen wir sie in die Lagrange Gleichung ein (für partielles Ableiten siehe Anhang A.1):

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -mg$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = m\ddot{x} + mg = 0.$$

Hieraus folgt nun:

$$m(\ddot{x} + g) = 0$$

Die Lösung der Lagrange Gleichung ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{x} = -g.$$

Um die Bewegungsgleichungen zu erhalten, müssen wir diesen Ausdruck lediglich zweimal nach der Zeit  $t$  integrieren:

$$-\int g dt = -gt + x_0$$

$$\int (-gt + v_0) dt = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + x_0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + x_0.$$

## 1.6 Zusammenfassung

Nach bisherigen Erkenntnissen lässt sich eine Art Gebrauchsanweisung für das Aufstellen der Bewegungsgleichungen geben:

1. Zuerst muss man die potentielle und kinetische Energie in geeigneten verallgemeinerten Koordinaten ausdrücken (ohne Berücksichtigung der Zwangsbedingungen).
2. Im nächsten Schritt soll auf die Zwangsbedingungen eingegangen werden; durch Einsetzen in die potentielle und kinetische Energie reduzieren sich die Koordinaten auf  $3N - k$ .
3. Jetzt wird die Lagrange Funktion ( $L = T - V$ ) aufgestellt und anschließend erfolgt das
4. Einsetzen in die Lagrange Gleichung.

(vgl. [2], S. 27, 28)

## 2 Anwendung auf ausgewählte Beispiele

### 2.1 Fadenpendel

Zu Beginn soll das Fadenpendel aus Kapitel 1.1 erneut aufgegriffen werden. Aus Gleichung 1.2 folgt für die kinetische Energie  $T$ :

$$T = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2.$$

Für die potentielle Energie  $U$  gilt:

$$U = E_{\text{pot}} = mgh, \quad \text{die Höhe } h \text{ der schwingenden Masse beträgt } -l \cdot \cos(\phi) :$$
$$U = -mgl \cos(\phi)$$

Die schwingende Masse wird durch die Aufhängung an einem Faden eingeschränkt und

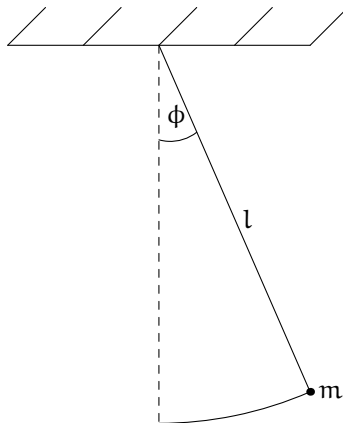


Abbildung 2.1: Fadenpendel

unterliegt somit einem Zwang; der Faden verhindert den freien Fall des Körpers. Auf die Zwangsbedingung wurde nicht explizit eingegangen, da sie intuitiv berücksichtigt wurde:  $x(t) = l \cdot \phi(t)$ . Die Fadenlänge  $l$  ist in diesem Ausdruck konstant. Die Lagrangefunktion

für das Fadenpendel lautet also:

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mgl \cos \phi = ml\left(\frac{l}{2}\dot{\phi}^2 + g \cos \phi\right).$$

Im nächsten Schritt wird diese Funktion in die Euler-Lagrange-Gleichung (Gleichung 1.10) eingesetzt. Es ist nun erforderlich partiell (teilweise) zu differenzieren, da es sich um eine Funktion mehrerer Veränderlicher handelt. Dabei werden die nicht relevanten Variablen als konstant betrachtet (siehe Anhang A.1).

$$\text{Die Lagrangegleichung: } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0.$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\phi}) = ml^2\ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mgl \sin \phi$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = ml^2\ddot{\phi} + mgl \sin \phi = 0$$

Da es sich beim Fadenpendel nur um kleine Auslenkungen (kleines  $\phi$ ) handelt, können wir die Differentialgleichung analytisch lösen, indem die Beziehung

$$\sin \phi \approx \phi$$

verwendet wird. Diese Näherung wird i.A. als Kleinwinkelnäherung bezeichnet; sie gilt nur für kleine Winkel, d.h. für  $\phi < 10^\circ$ .

Die Lagrangegleichung lautet jetzt:

$$\begin{aligned} ml^2\ddot{\phi} + mgl\phi &= 0, \\ \ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Der Ausdruck  $\frac{g}{l}$  wird in der Regel mit  $\omega^2$  abgekürzt:

$$\ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0.$$

$\omega$  wird normalerweise als *Kreisfrequenz* bezeichnet; zwischen der Kreisfrequenz  $\omega$  und der Frequenz  $f$  besteht der Zusammenhang:

$$\omega = 2\pi f \tag{2.2}$$

Nach Multiplikation der Differentialgleichung mit  $l$  erhalten wir nach Gleichung 1.2:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{2.3}$$

Diese Differentialgleichung nennt man „Differentialgleichung der harmonischen Schwingung“. Da die Funktion  $\phi(t)$  und ihre zweite Ableitung in ihr vorkommen, muss die Lösung eine Sinus- oder Kosinusfunktion<sup>1</sup> sein. Der Faktor  $\omega^2$  entsteht durch Nachdifferenzieren. Der Ansatz für eine Lösung sieht also wie folgt aus:

$$x(t) = C \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2.4)$$

Wir leiten nun diese „Vermutung“ zweimal ab, und bestimmen anschließend die Koeffizienten  $C$  und  $B$ .

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= C\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t \\ \ddot{x}(t) &= -C\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t \end{aligned}$$

Um  $C$  und  $B$  zu bestimmen, setzen wir die sog. Anfangsbedingungen ein. Sie lauten:

$$x(0) = A \quad \dot{x}(0) = 0,$$

wobei  $A$  die Amplitude der Schwingung ist. Wir erhalten nun folgendes lösbares Gleichungssystem:

$$x(0) = C \cdot 0 + B \cdot 1 = A \quad (2.5a)$$

$$\dot{x}(0) = C\omega - 0 \cdot B = 0 \quad (2.5b)$$

Aus den beiden Gleichungen (2.5a, 2.5b) ergibt sich für  $C$  und  $B$

$$B = A \quad C = 0$$

Der Lösungsansatz kann dadurch wie folgt geschrieben werden:

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (2.6)$$

Durch die Phasenverschiebung von Kosinus- und Sinusfunktion kann man ihn auf die allgemeine Lösung für harmonische Schwingungen zurückführen (siehe [2], S. 22):

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi_0) \quad (2.7)$$

Die Richtigkeit dieser Lösung lässt sich leicht überprüfen:

$$x = A \cos(\omega t) \quad (2.8a)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t) \quad (2.8b)$$

---

<sup>1</sup>Auch die Exponentialfunktion ist möglich. Der Zusammenhang zwischen Sinus, Kosinus und Exponentialfunktion ist durch die *Eulersche Formel* beschrieben (vgl. [6], S. 140 Gleichung 2.147):  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ .

Wir setzen nun Gleichungen 2.8a und 2.8b in Gleichung 2.3 ein:

$$\begin{aligned} -A\omega^2 \cos(\omega t) + \omega^2 \cdot A \cos(\omega t) &= \\ A\omega^2 (\cos(\omega t) - \cos(\omega t)) &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Differentialgleichung 2.3 erfüllt und damit, dass die Lösung 2.7 korrekt ist.

(vgl. [5], S. 70, 71)

## 2.2 Abrutschendes Seil

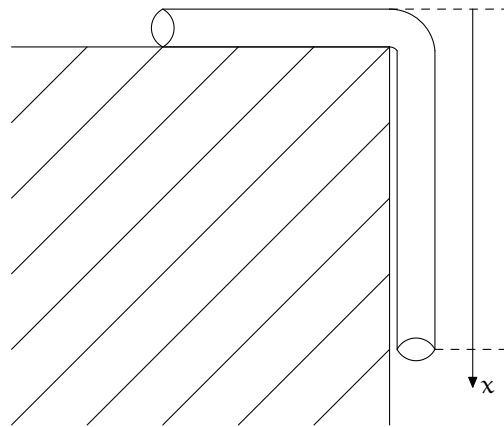


Abbildung 2.2: Abrutschendes Seil

Wie in Abbildung 2.2 zu sehen ist, soll ein Seil nach dem Loslassen über eine Kante reibungsfrei hinunterrutschen.

Man muss bei dieser Aufgabe darauf achten, dass wir mit einer Art effektiven Masse  $\rho$  rechnen müssen, da nur die überhängende und damit beschleunigte Masse von belang ist.  $\rho$  sei die Seilmasse pro Längeneinheit und das Seil habe die Länge  $l$ .

Aus 1.7 und 1.3b ergibt sich für die kinetische Energie:

$$T = \frac{\rho l}{2} \dot{x}^2.$$

Der überhängende Teil wird mit  $g$  beschleunigt; auf ihn wirkt die Kraft  $F_g = -\rho g$ . Für die potentielle Energie folgt aus 1.8b:

$$U = \int_0^x -\rho g x' dx' = -\rho g \int_0^x x' dx' = -\frac{\rho}{2} g x^2.$$

Die Lagrangefunktion lautet:

$$L = T - U = \frac{\rho l}{2} \dot{x}^2 + \frac{\rho}{2} g x^2$$

$$L = \frac{m}{2} \left( \dot{x}^2 + \frac{g}{l} x^2 \right).$$

Die unabhängige Koordinate ist in diesem Fall  $x$ ; daraus ergibt sich für die Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

und wenn wir nun  $L$  einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m\dot{x}) - m\frac{g}{l}x &= 0 \\ m\ddot{x} - m\frac{g}{l}x &= 0 \\ \ddot{x} - \frac{g}{l}x &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Diese Differentialgleichung (2.9) ist nahezu identisch mit Gleichung 2.1, abgesehen vom Vorzeichen der Kraft. Dieser Umstand ist auf die unterschiedliche Auswirkung der verschiedenen Kräfte zurückzuführen. Beim Fadenpendel wirkt die Kraft der Bewegung entgegen; die schwingende Masse wird dadurch in die Ausgangslage zurückgeführt. Beim abrutschenden Seil beschleunigt die Gewichtskraft ( $F_g = \rho \cdot l$ ) das Seil positiv, d. h. es wird immer schneller.

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist nicht so einfach wie die der Schwingungsgleichung. Das Problem ist, dass  $\ddot{x}$  und  $x$  das gleiche Vorzeichen besitzen. Die Lösung kann also weder die Sinus-, noch die Kosinusfunktion sein. Um die Lösung zu erhalten, ist es notwendig, einen Lösungsansatz zu verwenden, der die Exponentialfunktion  $e^x$  enthält; denn für  $e^x$  gilt:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

Der Lösungsansatz lautet:

$$x(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t} \quad \text{mit} \quad \lambda = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \text{wobei} \quad A, B \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Um die unbekanntenen Koeffizienten  $A$  und  $B$  zu bestimmen, müssen wir die sog. Anfangsbedingungen einsetzen. Sie lauten:

$$x(0) = a \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Daraus folgt für  $x(t)$  und  $\dot{x}(t)$ :

$$x(0) = Ae^0 + Be^0 = A + B = a \quad (2.11a)$$

$$\dot{x}(0) = A\lambda e^0 - B\lambda e^0 = \lambda A - \lambda B = 0 \quad (2.11b)$$

Die Gleichungen 2.11a und 2.11b bilden ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten, d. h.  $A$  und  $B$  können bestimmt werden:

$$A = B = \frac{a}{2}$$

Der Lösungsansatz 2.10 kann jetzt wie folgt geschrieben werden<sup>2</sup>:

$$x(t) = \frac{a}{2} \left( e^{\lambda t} + e^{-\lambda t} \right) = a \cosh \lambda t.$$

Um die Lösung zu testen, bilden wir ihre zweite Ableitung:

$$\dot{x}(t) = a\lambda \sinh \lambda t, \quad (2.12a)$$

$$\ddot{x}(t) = a\lambda^2 \cosh \lambda t, \quad (2.12b)$$

und setzen Gleichung 2.12b in Gleichung 2.9 ein.

$$\begin{aligned} a\lambda^2 \cosh \lambda t - \lambda \cdot a\lambda \cosh \lambda t &= \\ \cosh \lambda t - \cosh \lambda t &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Daraus erkennen wir, dass unser Ansatz (2.10) richtig gewesen sein muss.

(vgl. [4], S. 33, 417, 418)

In Abbildung 2.3 ist die Funktion  $x(t) = a \cosh \lambda t$  zu sehen. Der Verlauf der Funktion entspricht genau der Erwartung vom Ablauf des Vorgangs. Am Anfang rutscht das Seil nur langsam, mit der Zeit wird es aber immer schneller.

## 2.3 Trägheitsgesetz

Um Probleme der Mechanik zu beschreiben, ist es sehr wichtig ein geeignetes Bezugssystem zu wählen. Es kann vorkommen, dass bei einer ungeschickten Wahl die Beschreibung einer einfachen Erscheinung äußerst kompliziert wird.

In einem beliebigen Bezugssystem kann man nicht davon ausgehen, dass der Raum weder homogen noch isotrop ist, d. h., dass ein Körper bestimmte Bewegungen bevorzugt, obwohl keine Wechselwirkung mit anderen Körpern stattfindet. Selbiges gilt auch

---

<sup>2</sup>Die hyperbolischen Funktionen sind in A.2 aufgeführt

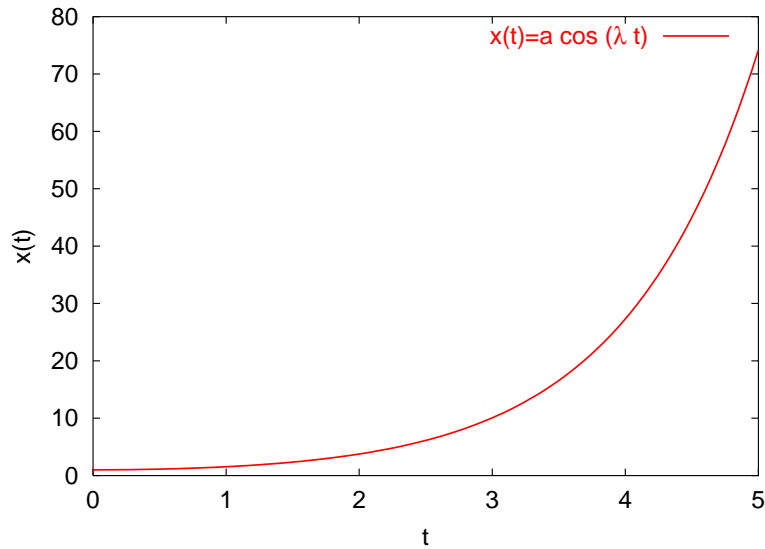


Abbildung 2.3:  $x(t) = a \cosh \lambda t$

für die Zeit; das bedeutet, dass verschiedene Zeitpunkte verschiedene Auswirkungen auf einen Körper haben können.

Es ist jedoch möglich ein Bezugssystem zu finden, in dem sowohl der Raum, als auch die Zeit homogen und isotrop sind. Man nennt ein solches Bezugssystem ein *Inertialsystem* (d. h. ein nicht-beschleunigtes Bezugssystem). In einem Inertialsystem gilt auch das Newtonsche Axiom des Trägheitssatzes. Es besagt, dass ein Körper sich mit gleicher Geschwindigkeit weiter bewegt oder in der Ruhe verharnt, solange keine Kraft auf ihn wirkt.

Der Trägheitssatz kann auch mit Hilfe der Lagrangefunktion nachvollzogen werden: Die Aussage, dass Raum und Zeit homogen und isotrop sein sollen, führt dazu, dass die Lagrangefunktion weder die Zeit  $t$ , noch den Ortsvektor  $\vec{r}$  enthalten kann. Sie hängt lediglich von der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ab (es gilt  $\frac{d}{dt}\vec{r} = \vec{v}$ ); da aber keine Richtung der Bewegung bevorzugt wird, ist nur der Geschwindigkeitsbetrag von Belang. Wir können jetzt  $L$  in Abhängigkeit von  $v^2$  schreiben:

$$L = L(v^2) \tag{2.13}$$

Beim Einsetzen in die Euler-Lagrange-Gleichung (1.10) entfällt  $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$  als Folge der Unabhängigkeit der Lagrangefunktion von  $\vec{r}$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} &= 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Aus Gleichung 2.14 können wir schließen, dass der Term  $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$  eine Konstante sein muss (die Ableitung einer Konstanten ist immer Null!). Die Funktion  $L$  hängt lediglich von  $\vec{v}$  ab, also muss folglich gelten:

$$\vec{v} = \text{const.} \quad (2.15)$$

Das Ergebnis unserer Überlegungen ist, dass ein Körper in einem Inertialsystem, auf den keine Kraft wirkt, der sich also frei bewegen kann, mit gleichen Geschwindigkeitsbetrag  $v^2$  und gleicher Richtung ( $\vec{v}$ ) weiter fortbewegt.

(vgl. [5], S. 5, 6)

## 2.4 Rollpendel

Um nun einen Einblick in die Leistungsfähigkeit des Lagrangeformalismus zu erhalten, wollen wir ein komplexeres Problem betrachten. Das Rollpendel lässt sich bereits mit einem Newtonschen Ansatz nicht mehr lösen. Bei diesem Pendel wird die Masse  $m_1$

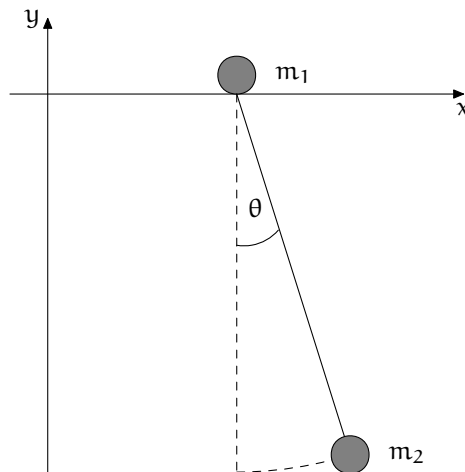


Abbildung 2.4: Rollpendel

durch die Schwingung der Masse  $m_2$  reibungsfrei mitbewegt. Die Masse  $m_1$  hat die Koordinaten  $x_1$  und  $y_1$ , die Masse  $m_2$  hat die Koordinaten  $x_2$  und  $y_2$ .

Die kinetische Energie der Masse  $m_1$  lautet:

$$T_1 = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2.$$

Wir wählen als Koordinate für  $m_2$  wieder Polarkoordinaten. Nun müssen wir in unsere Überlegungen auch die Tatsache mit einbeziehen, dass sich  $m_2$  sowohl senkrecht, als auch waagrecht bewegen kann. So ergibt sich für die kinetische Energie von  $m_2$ :

$$T_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2).$$

Nach Gleichung 1.7 dürfen wir jetzt um die gesamte kinetische Energie zu erhalten die Summe aus  $T_1$  und  $T_2$  bilden:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2).$$

Da nur die Masse  $m_2$  potentielle Energie besitzt, lautet sie:

$$U = m_2 g y_2.$$

Daraus ergibt sich für die Lagrange-Funktion

$$L = T - U = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_2 g y_2.$$

Nun müssen noch die Zwangsbedingungen berücksichtigt werden: die  $x$ -Koordinaten der beiden Massen hängen voneinander ab, die Höhe der Masse  $m_2$  hängt vom Faden ab.

$$x_2 = x_1 + l \sin \theta \tag{2.16a}$$

$$y_2 = -l \cos \theta \tag{2.16b}$$

Unter Berücksichtigung dieser beiden Gleichungen sind nur noch zwei Koordinaten unabhängig, nämlich  $x_1$  und  $\theta$ .

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left( \left( \frac{d}{dt}(x_1 + l \sin \theta) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt}(-l \cos \theta) \right)^2 \right) + m_2 g l \cos \theta$$

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left( (\dot{x}_1 + l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (l\dot{\theta} \sin \theta)^2 \right) + m_2 g l \cos \theta$$

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left( \dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1 l \dot{\theta} \cos \theta + \underbrace{l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta}_{l^2 \dot{\theta}^2} \right) + m_2 g l \cos \theta$$

Nach Umformung des Terms  $l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta$  in  $l^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$  können wir zur Vereinfachung den trigonometrischen Satz des Pythagoras  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  anwenden:

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left( \dot{x}_1^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{x}_1 l \dot{\theta} \cos \theta \right) + m_2 g l \cos \theta$$

Jetzt erfolgt das partielle Differenzieren nach den beiden unabhängigen Koordinaten  $x_1$  und  $\theta$ .

Gleichung 1:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_1 + m_2 l \dot{\theta} \cos \theta \right) &= 0 \\ m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_1 + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta &= 0 \\ \ddot{x}_1 (m_1 + m_2) + m_2 l (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (2.17a)$$

Gleichung 2:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( m_2 l^2 \dot{\theta} + m_2 \dot{x}_1 l \cos \theta \right) + m_2 \dot{x}_1 l \dot{\theta} \sin \theta + m_2 g l \sin \theta &= 0 \\ l \ddot{\theta} + \ddot{x}_1 \cos \theta + g \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.17b)$$

Gleichungen 2.17a und 2.17b bilden ein Gleichungssystem, das man lösen muss, um die Bewegungsgleichung zu erhalten.

(vgl. [4], S. 28, 29)

In Abbildung 2.5 ist ein möglicher Versuchsaufbau eines Rollpendels zu sehen. Leider scheiterten die von mir durchgeführten Versuche an einer unerwartet großen Reibung; Im Versuch kamen nie mehr als zwei Ausschläge des oberen Körpers zustande.

## 2.5 Doppelpendel

Zuerst ein paar grundsätzliche Überlegungen:

Die Bewegung des zweiten Körpers wird offensichtlicherweise von der des ersten beeinflusst, d. h. wir müssen die Koordinaten  $x_2$  und  $y_2$  in Abhängigkeit von  $x_1$  und  $y_1$  aufstellen. Für  $x_1$  und  $y_1$  gilt in Polarkoordinaten (wir wählen die Koordinate  $\phi_1$ ):

$$x_1 = l_1 \phi_1, \quad (2.18a)$$

$$h = l_1 \cos \phi_1. \quad (2.18b)$$



Abbildung 2.5: Versuchsaufbau Rollpendel (links: von vorne, rechts: von oben)

Die anderen beiden Koordinaten sind in kartesischen Koordinaten:

$$x_2 = l_1 \sin \phi_1 + l_2 \sin \phi_2, \quad (2.19a)$$

$$y_2 = l_1 \cos \phi_1 + l_2 \cos \phi_2. \quad (2.19b)$$

Analog zum Fadenpendel erhalten wir für die potentielle (1.8b) und kinetische (1.7)

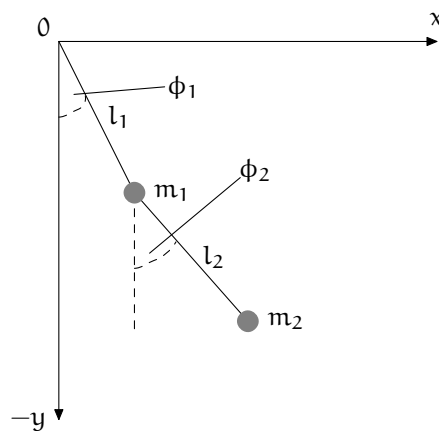


Abbildung 2.6: Doppelpendel

Energie des ersten Massenpunktes, wobei noch zu beachten ist, dass es notwendig ist, die Summe der Massen zu verwenden:

$$T_1 = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \quad (2.20a)$$

$$U_1 = -(m_1 + m_2)gh = -(m_1 + m_2)gl_1 \cos \phi_1. \quad (2.20b)$$

Da die Koordinaten des zweiten Massenpunktes in kartesischen Koordinaten angegeben sind, ist es erforderlich, die Geschwindigkeit in  $x$ - und  $y$ -Richtung zu beachten.

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \\
 &= \frac{m_2}{2} \left( \dot{\phi}_1^2 l_1^2 \cos^2 \phi_1 + \dot{\phi}_2^2 l_2^2 \cos^2 \phi_2 + \dot{\phi}_1^2 l_1^2 \sin^2 \phi_1 + \dot{\phi}_2^2 l_2^2 \sin^2 \phi_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \dot{\phi}_2^2 l_2^2 \cos^2 \phi_2 + \underbrace{2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 l_1 l_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 + 2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 l_1 l_2 \sin \phi_1 \sin \phi_2}_{2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)} \right) = \\
 &= \frac{m_2}{2} \left[ \dot{\phi}_1^2 l_1^2 \cos^2 \phi_1 + \dot{\phi}_2^2 l_2^2 \cos^2 \phi_2 + \dot{\phi}_1^2 l_1^2 \sin^2 \phi_1 + \dot{\phi}_2^2 l_2^2 \sin^2 \phi_2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right]
 \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck lassen sich jeweils die Faktoren vor den quadratischen Winkelfunktionen ausklammern. Durch Anwenden der Beziehung  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  fallen sämtliche quadratische Winkelfunktionen weg.

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \frac{m_2}{2} \left[ \dot{\phi}_1^2 l_1^2 \underbrace{(\sin^2 \phi_1 + \cos^2 \phi_1)}_1 + \dot{\phi}_2^2 l_2^2 \underbrace{(\cos^2 \phi_2 + \sin^2 \phi_2)}_1 + \right. \\
 &\quad \left. + 2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right] = \\
 &= \frac{m_2}{2} \left[ \dot{\phi}_1^2 l_1^2 + \dot{\phi}_2^2 l_2^2 + 2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right] \tag{2.21a}
 \end{aligned}$$

Die potentielle Energie des zweiten Körpers erhalten wir analog zu der des ersten:

$$U_2 = m_2 g l_2 \cos \phi_2 \tag{2.21b}$$

Anhand der Gleichungen 2.20a, 2.20b, 2.21a und 2.21b können wir jetzt die Lagrange-funktion aufstellen:

$$\begin{aligned}
 L &= (T_1 + T_2) - (U_1 + U_2) = \\
 &= \left( \frac{m_1}{2} l^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left[ \dot{\phi}_1^2 l_1^2 + \dot{\phi}_2^2 l_2^2 + 2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right] \right) \\
 &\quad - \left( -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \phi_1 - m_2 g l_2 \cos \phi_2 \right) = \\
 &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\phi}_1^2 l^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\phi}_2^2 l_2^2 + m_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \\
 &\quad + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \phi_1 + m_2 g l_2 \cos \phi_2
 \end{aligned}$$

Da es hierbei zwei unabhängige Koordinaten gibt,  $\phi_1$  und  $\phi_2$ , müssen wir laut 1.10 nach beiden differenzieren.

Gleichung 1:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \phi_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( (m_1 + m_2) \dot{\phi}_1 l_1^2 + m_2 \dot{\phi}_2 l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right) \\ &+ m_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 l_1 l_2 \sin \phi_1 - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \phi_1 = 0 \\ (m_1 + m_2) \ddot{\phi}_1 l_1^2 + m_2 l_1 l_2 \left[ \ddot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) - \dot{\phi}_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cdot (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) \right] \\ &+ m_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 l_1 l_2 \sin \phi_1 - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \phi_1 = 0 \end{aligned}$$

Nach einigen Umformungen erhalten wir diese Differentialgleichung:

$$\ddot{\phi}_1 + \frac{g}{l_1} \sin \phi_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{l_2}{l_1} \left( \cos(\phi_2 - \phi_1) \ddot{\phi}_1 + \sin(\phi_2 - \phi_1) \dot{\phi}_2^2 \right) = 0 \quad (2.22a)$$

Gleichung 2:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \phi_2} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( m_2 \dot{\phi}_2 l_2^2 + m_2 \dot{\phi}_1 l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right) \\ &- m_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 l_1 l_2 \sin \phi_2 - m_2 g l_2 \sin \phi_2 = 0 \\ m_2 \ddot{\phi}_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \left[ \ddot{\phi}_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) - \dot{\phi}_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cdot (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) \right] \\ &- m_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 l_1 l_2 \sin \phi_2 - m_2 g l_2 \sin \phi_2 = 0 \end{aligned}$$

Dieser Ansatz führt schließlich auf:

$$\ddot{\phi}_2 + \frac{g}{l_2} \sin \phi_2 + \frac{l_1}{l_2} \left( \cos(\phi_2 - \phi_1) \ddot{\phi}_1 + \sin(\phi_2 - \phi_1) \dot{\phi}_1^2 \right) = 0 \quad (2.22b)$$

Um die beiden Differentialgleichungen zu vereinfachen setzen wir  $m_1 = m_2 = m$ ,  $l_1 = l_2 = l$ ,  $\cos \phi \approx 1$ ,  $\sin \phi \approx \phi$  und  $\dot{\phi}^2 \phi \approx 0$ :

$$\text{Gleichung 1:} \quad 2\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2 + 2\frac{g}{l}\phi_1 = 0 \quad (2.23)$$

$$\text{Gleichung 2:} \quad \ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2 + \frac{g}{l}\phi_2 = 0 \quad (2.24)$$

Laut [4], S.431 lauten die Lösungen für die beiden Differentialgleichungen folgendermaßen:

$$\phi_1(t) = (ae^{i\omega_1 t} + be^{-i\omega_1 t}) + (ce^{i\omega_2 t} + de^{-i\omega_2 t}) \quad (2.25)$$

$$\phi_2(t) = -\sqrt{2}(ae^{i\omega_1 t} + be^{-i\omega_1 t}) + \sqrt{2}(ce^{i\omega_2 t} + de^{-i\omega_2 t}) \quad (2.26)$$

mit

$$a = -b = \frac{\dot{\phi}_0}{4i\omega_1},$$

$$c = -d = \frac{\dot{\phi}_0}{4i\omega_2}.$$

(vgl. [4], S.36, 430, 431 und [5], S.13)

# A Mathematischer Anhang

## A.1 Partielle Ableitung

Bei Funktionen, die von mehreren Variablen abhängen, ist beim Differenzieren zu beachten, dass partiell abgeleitet wird. Man verwendet hier üblicherweise ein stilisiertes  $\partial$  anstatt des gewöhnlichen  $d$ .

„Man erhält die partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_k$ , indem man alle Veränderlichen mit Ausnahme von  $x_k$  als konstant betrachtet und die nunmehr nur noch von der Veränderlichen  $x_k$  abhängende Funktion in gewohnter Weise nach  $x_k$  differenziert.“ ([3], S. 248)

## A.2 Hyperbolische Funktionen

Die hyperbolischen Funktionen treten häufig in der Physik auf. Sie sind eine „Kombination“ aus den Funktionen  $e^x$  und  $e^{-x}$ . Von ihnen gibt es vier Stück:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.1})$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.2})$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.3})$$

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \neq 0, \quad (\text{A.4})$$

(vgl. [1], S. 315)

Auf die Ableitungen wird nicht weiter eingegangen; sie sind recht einfach aus den Exponentialfunktionstermen zu bilden.

### A.3 Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung

Die Herleitung ist nicht Gegenstand dieser Facharbeit; auf sie wird nicht eingegangen. Sie wurde nur der Vollständigkeit halber aufgenommen und folgt genau der Darstellung in [5], S. 2, 3, 4.

Grundlage für ein weiteres Vorgehen ist das *Prinzip der kleinsten Wirkung* (siehe Gleichung 1.5):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (\text{A.5})$$

Wie bereits in Kapitel 1.3 erwähnt, soll die Wirkung minimal werden.

Zunächst soll zur Vereinfachung der Rechnung angenommen werden, dass das mechanische System lediglich einen Freiheitsgrad besitzt, d.h. es muss nur eine Funktion  $q(t)$  bestimmt werden.

Angenommen  $q = q(t)$  sei die Funktion, die  $S$  minimal werden läßt, dann wächst  $S$ , wenn man  $q(t)$  durch eine Funktion der Art

$$q(t) = q(t) + \delta q(t) \quad (\text{A.6})$$

ersetzt.  $\delta q(t)$  nennt man *Variation der Funktion*  $q(t)$ , d.h. sie ist in dem Zeitintervall von  $t_1$  bis  $t_2$  infinitesimal klein. Für  $t = t_1$  und  $t = t_2$  müssen alle Funktionen A.6 den selben Wert annehmen. Folglich braucht man eine Funktion  $\delta q(t)$ , die für  $t = t_1$  und  $t = t_2$  Null ist:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Die Änderung von  $S$  beim Ersetzen von  $q$  durch  $q + \delta q$  ergibt sich durch Betrachten der Differenz

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (\text{A.8})$$

Damit  $S$  minimal (allgemein ein Extremum) muss die Gesamtheit aller Glieder erster Ordnung verschwinden; diese Gesamtheit heißt Variation des Integrals. Auf diese Weise kann das Prinzip der kleinsten Wirkung in folgender Form geschrieben werden:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (\text{A.9})$$

und nach dem Ausführen der Variation:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0. \quad (\text{A.10})$$

Nach partieller Integration des zweiten Glieds ergibt sich:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta dt = 0 \quad (\text{A.11})$$

Nach Gleichung A.7 verschwindet der erste Summand. Das übrige Integral muss für beliebige Werte von  $\delta q$  gleich Null sein, d.h der Integrand muss verschwinden. So erhalten wir die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Werden mehrere Freiheitsgrade ( $s > 1$ ) berücksichtigt, so müssen  $s$  Funktionen  $q_i(t)$  variiert werden, und wir erhalten dann  $s$  Gleichungssysteme der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i \in \{1, 2, \dots, s\}. \quad (\text{A.13})$$

# B Newtonsche Lösungsansätze

## B.1 Fadenpendel

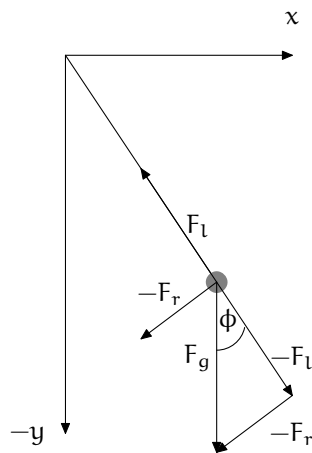


Abbildung B.1: Kräftezerlegung beim Fadenpendel

Bei der Kräftezerlegung in Abbildung B.1 können wir nun folgende Feststellungen machen:

$$\vec{F}_g = -\vec{F}_l - \vec{F}_r,$$

wobei  $-\vec{F}_r$  die „rücktreibende“ Kraft ist, die die Masse  $m$  wieder in die Ausgangslage bringt und der Bewegung des Pendels entgegenwirkt.  $-\vec{F}_l$  ist die Gegenkraft zur „Fadenspannung“ und  $\vec{F}_g$  die Gewichtskraft der Masse  $m$ . Der Abbildung entnehmen wir außerdem folgenden Zusammenhang:

$$-\vec{F}_r = \vec{F}_g \sin \phi,$$

und erhalten nach einigen Umformungen:

$$-\vec{F}_r = mg \sin \phi$$

$$-m\ddot{x} = mg \sin \phi$$

$$-\ddot{x} = g \sin \phi$$

$$\ddot{x} + g \sin \phi = 0 \tag{B.1}$$

Aus Gleichung B.1 erhalten wir unter Verwendung der Kleinwinkelnäherung  $\sin \phi \approx \phi$  und der Beziehung  $x = l\phi$  die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0. \quad (\text{B.2a})$$

bzw. wenn wir die Kreisfrequenz  $\omega$  durch  $\sqrt{\frac{g}{l}}$  ausdrücken:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (\text{B.2b})$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung wurde bereits in 2.1 ausführlich besprochen.

(vgl. [6], S. 134, 135)

## B.2 Abrutschendes Seil

Eine Abbildung der Aufgabe findet der Leser auf Seite 12 (Abbildung 2.2).  $m$  kennzeichne die Länge des Seils; der überhängende Teil sei  $x$ . Auf den überhängenden Teil wirkt die Kraft:

$$F = m \frac{x}{l} g. \quad (\text{B.3})$$

Die Masse, die der Erdbeschleunigung unterliegt, ist nur die des überhängenden Teils. Jener hat den Anteil  $\frac{x}{l}$  der Gesamtmasse  $m$ .

Daraus folgt für die Bewegungsgleichung unter Verwendung von  $F = m \cdot a$ :

$$m\ddot{x} = m \frac{x}{l} g,$$
$$\ddot{x} - \frac{g}{l}x = 0 \quad (\text{B.4})$$

Die Lösung der Differentialgleichung B.4 wurde ausführlich in 2.2 beschrieben.

(vgl. [6], S. 160, 196)

# Literaturverzeichnis

- [1] DALLMANN, HERBERT und KARL-HEINZ ELSTER: *Einführung in die höhere Mathematik*, Band 1. Gustav Fischer Verlag, Jena, dritte Auflage, 1991.
- [2] HAMMER, DR. A. , DR. H. HAMMER und DR. K. HAMMER: *Physikalische Formeln und Tabellen*. J. Lindauer Verlag, München, sechste Auflage, 1998.
- [3] HEUSER, HARRO: *Lehrbuch der Analysis*, Band 2 der Reihe *Lehrbuch der Analysis*. B. G. Teubner, Stuttgart, zweite Auflage, 1983.
- [4] KUYPERS, FRIEDHELM: *Klassische Mechanik*. WILEY-VCH Verlag GmbH, Weinheim, fünfte Auflage, 1997.
- [5] LANDAU, L. D. und E. M. LIFSCHITZ: *Mechanik*, Band 1 der Reihe *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M., 14. Auflage, 1997.
- [6] NOLTING, WOLFGANG: *Klassische Mechanik*, Band 1 der Reihe *Grundkurs Theoretische Physik*. Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, fünfte Auflage, 1999.