

# Die Laplacetransformation und die Faltung

Michael Hartwig

11. April 2001

## Zusammenfassung

Ein Problem der Mathematik und der Physik ist es, Differentialgleichungen zu lösen. Die Laplacetransformation bietet die Möglichkeit Differential- und Integralausdrücke auf algebraische Ausdrücke umzuformen

## 1 Die Laplacetransformation

Man steht z.B. vor folgendem Problem:

$$y'' - 2y' + 2y = \cos t + 2 \sin t \quad \text{mit } y(0) = 2, y'(0) = 4$$

Hier bietet sich die LT als Lösungsmethode an. Allgemein kann man diese Methode anwenden, wenn:

- es sich um eine lineare Dgl. mit konstanten Koeffizienten handelt
- die Anfangswerte bei 0 gegeben sind
- die rechte Seite der Gleichung eine bekannte LT hat

Definition: sei  $f$  eine komplexwertige Funktion, die über jedem endlichen Intervall integrierbar ist. Konvergiert das Integral, heißt die Funktion

$$L[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

die Laplacetransformierte von  $f$ .

Ein Beispiel:

$$L(1) = \int_0^{\infty} dt e^{-st} = \frac{1}{p}$$

Für viele bekannte Funktionen sind die LT tabelliert. Die Umkehrtransformation der LT ist durch das Bromwich Integral gegeben:

$$f(t) = L^{-1}(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dz F(z) e^{zt} \quad \text{mit } t > 0$$

Der Integrationsweg verläuft hier im komplexen, man muß also die Methoden der Funktionentheorie anwenden.

Einige Rechenregeln:

- $L[\alpha f(t) + \beta g(t)](s) = \alpha L[f(t)](s) + \beta L[g(t)](s)$
- $L[f(ct)](s) = \frac{1}{c} L[f(t)]\left(\frac{s}{c}\right)$
- $L[e^{-ct} f(t)](s) = L[f(t)](s+c)$
- $L\left[\int_0^t f(u) du\right](s) = \frac{1}{s} L[f(t)](s)$
- $L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} L[f(t)](u) du$
- $L[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[f(t)](s)$
- $L[f'(t)](s) = sL[f(t)](s) - f(0)$
- $L[f''(t)](s) = s^2 L[f(t)](s) - sf(0) - f'(0)$

## 2 Faltung

Seien die LT der Funktionen  $g$  und  $h$  bekannt, welche Funktion löst dann die Gleichung

$$L(g)L(h) = L(f)?$$

Dies führt zum Begriff der Faltung.

Definition: Seien  $h$  und  $g$  Funktionen auf  $\mathfrak{R}$ , dann ist das Faltungsprodukt  $h * g$  durch

$$(h * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} h(x - x')g(x')dx'$$

definiert.

Die Laplace-Faltung ist definiert durch

$$(h * g)(t) := \int_0^t h(t - t')g(t')dt'$$

Sie ist kommutativ und assoziativ:

$$\begin{aligned} h * g &= g * h \\ (h * g) * f &= h * (g * f) \end{aligned}$$

Kommen wir nun zu unserem ursprünglichen Problem zurück: Wir suchten eine Lösung der Gleichung

$$y'' - 2y' + 2y = \cos t + 2 \sin t \quad \text{mit } y(0) = 2, y'(0) = 4$$

Die Vorgehensweise:

- Transformation der Gleichung
- Auflösung der Gleichung nach  $L(y)$
- Partialbruchzerlegung von  $L(y)$
- Rücktransformation der einzelnen Teile

Nun konkret:

$$\begin{aligned} a) L[y''] &= s^2 L[y] - sy(0) - y'(0) = s^2 L(y) - 2s - 4 \\ L(y') &= sL(y) - y(0) = sL(y) - 2 \\ L[\cos t] &= \frac{s}{s^2 + 1}, L[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} s^2 L[y] - 2s - 4 - 2s[y] + 4 + 2L[y] &= \frac{2}{s^2 + 1} + \frac{2}{s^2 + 1} \\ b) L[y](s^2 - 2s + 2) &= \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{2}{s^2 + 1} + 2s = \frac{s + 2 + 2s(s^2 + 1)}{s^2 + 1} \\ \Rightarrow L[y] &= \frac{2s^3 + 3s + 2}{(s^2 + 1)(s^2 - 2s + 2)} \\ c) L[y] &= \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{s + 2}{s^2 - 2s + 2} \\ d) \frac{s + 2}{(s - 1)^2 + 1} &= \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 1} + \frac{3}{(s - 1)^2 + 1} = L[e^t \cos t] + 3L[e^t \sin t] \end{aligned}$$

Man erhält:

$$y = \cos t + e^t \cos t + 3e^t \sin t$$