
Quantenfeldtheorie

Hendrik van Hees¹
GoetheUniversität Frankfurt
Frankfurt Institute for Advanced Studies
Ruth-Moufang-Straße 1
D-60438 Frankfurt
Germany

11. April 2012

¹e-mail: hees@fas.uni-frankfurt.de

Inhaltsverzeichnis

1	Teilchen und Felder – eine heuristische Einführung	4
1.1	Relativistische Raumzeitstruktur und Lorentzgruppe	4
1.2	Das klassische Teilchenbild	7
1.2.1	Die relativistische Kinematik freier Punktteilchen	8
1.2.2	Laborsystem	10
1.2.3	Schwerpunktsystem	12
1.3	Das klassische elektromagnetische Feld	12
1.3.1	Die Maxwellgleichungen im Vakuum	12
1.3.2	Die relativistisch kovariante Form der Maxwellgleichungen	15
1.3.3	Lösung der quellenfreien Maxwellgleichungen	17
1.3.4	Lösung der Maxwellgleichungen bei vorgegebenen Quellen	19
1.3.5	Kanonische Formulierung der Elektrodynamik	21
1.3.6	Das Noether-Theorem	23
1.3.7	Hamiltonsche Formulierung	28
1.3.8	Kanonischer Feldformalismus mit Poisson-Klammern	29
1.4	Kanonische Feldquantisierung	30
1.4.1	Quantisierung des freien Klein-Gordon Feldes	31
1.4.2	Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes	39
1.5	Das Dirac-Feld	47
1.5.1	Das klassische Dirac-Feld	47
1.5.2	Quantisierung des freien Dirac-Feldes	54
1.5.3	Poincaré-Symmetrie der quantisierten Dirac-Theorie	57
1.5.4	Die diskreten Symmetrietransformationen P , C und T	59
	Literaturverzeichnis	65

Vorwort

In diesem Artikel soll die relativistische Quantenfeldtheorie in einer in sich geschlossenen Form dargestellt werden. Die Betonung liegt dabei auf den Methoden, die zur praktischen Lösung physikalischer Probleme führen. Ich plane dabei folgenden Aufbau.

Im ersten Kapitel formulieren wir die relativistische Quantenfeldtheorie (QFT) aus gruppentheoretischen Betrachtungen über die Raumzeitstruktur. Elementarteilchen werden dabei als Einteilchenunterräume des Fockraumes eingeführt, welche irreduzible Darstellungen der eigentlich orthochronen Lorentzgruppe bilden. Nachdem die QFT freier Teilchen ausgearbeitet und die wichtigsten Folgerungen wie der Zusammenhang zwischen Spin und Statistik und Invarianz unter CPT gezogen worden sind, schließen wir das Kapitel mit der Einführung in die Formulierung der Theorie in Gestalt von Funktionalen und Pfadintegralen.

Im zweiten Kapitel behandeln wir in einiger Ausführlichkeit die fermionische und bosonische Quantenelektrodynamik, einschließlich der Berechnung einiger elementarer Prozesse in niedrigster Ordnung der Störungstheorie (Baumgraphennäherung). Wir führen anhand dieses Paradebeispiels einer erfolgreichen relativistischen QFT wichtige Begriffe wie die S -Matrix und den Streuquerschnitt sowie die Feynmansche Diagrammtechnik als wichtiges methodologisches Hilfsmittel zur Berechnung solcher Beobachtungsgrößen ein.

Im dritten Kapitel betrachten wir Diagramme zur Störungstheorie höherer Ordnung, die Schleifen enthalten und zu Divergenzen führen. Dieses Problem wird durch die Renormierungstheorie gelöst, die wir mit Hilfe der dimensional Regularisierung formulieren. Wir besprechen schließlich die Renormierungsgruppe.

Das vierte Kapitel schließt den mehr formalen Teil dieses Skripts mit der Behandlung nichtabelscher Eichtheorien ab, die in möglichst enger Analogie zur Quantenelektrodynamik in der „Background Field“-Eichung formuliert wird.

Die übrigen Kapitel sind den modernen Anwendungen der Theorie in der Elementarteilchenphysik gewidmet. Wir besprechen dazu das Standardmodell der Elementarteilchen und die durch es mit hoher Präzision beschriebenen Phänomene der starken Wechselwirkung und die Vereinigung des Elektromagnetismus mit der schwachen Wechselwirkung zur elektro-schwachen Theorie von Glashow, Salam und Weinberg. Wir beschäftigen uns weiter mit effektiven Theorien in der Hadronen- und Kernphysik sowie mit der Formulierung der Gleichgewichtsthermodynamik und Anwendungen in der relativistischen Schwerionenphysik.

Kapitel 1

Teilchen und Felder – eine heuristische Einführung

In diesem Kapitel fassen wir die grundlegenden Begriffe der relativistischen Raumzeitstruktur und die Formulierung der klassischen Theorie der Teilchen und Felder zusammen. Ausgangspunkt ist eine Analyse der elementaren Theorie der **Lorentz- und Poincaré-Gruppen** anhand der klassischen Elektrodynamik. Wir werden dann erste Einblicke in die Quantenfeldtheorie freier Teilchen anhand der heuristischen Technik der **kanonischen Feldquantisierung** gewinnen.

1.1 Relativistische Raumzeitstruktur und Lorentzgruppe

Wir setzen voraus, daß der Leser mit den Grundlagen der klassischen relativistischen Mechanik und Elektrodynamik vertraut ist. Dieser erste Abschnitt soll dazu dienen, die wichtigsten Grundbegriffe zu wiederholen und die Notation dieses Skripts einzuführen. Wir bedienen uns des sogenannten **natürlichen Einheitensystems**, indem wir das (modifizierte) Plancksche Wirkungsquantum und die Lichtgeschwindigkeit zu 1 setzen:

$$\hbar = c = 1. \quad (1.1.1)$$

Üblicherweise ist es bequem, Massen, Energien und Impulse in MeV oder GeV anzugeben und Längen in fm (1 fm = 1 femto-meter = 1 Fermi = 10^{-15} m). Zur Umrechnung von fm in MeV^{-1} benötigen wir dann lediglich $[A^{+08}]$

$$\hbar c = 197.3269631(49) \text{ MeV fm}. \quad (1.1.2)$$

die in Klammern stehenden Ziffern geben dabei die Unsicherheit der Größe auf die entsprechenden letzten Dezimalstellen an.

Die relativistische Raumzeit ist ein affiner vierdimensionaler reeller Punktraum, auf dem eine Fundamentalform („Pseudometrik“) der Signatur (1,3) definiert ist. Führt man ein bzgl. dieser Fundamentalform orthonormiertes Basissystem in einem beliebig gewählten Bezugspunkt der Raumzeit ein, können wir jeden Raumzeitpunkt umkehrbar eindeutig durch die vier **kontravarianten Vektorkomponenten** x^μ ($\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$) beschreiben, und die Fundamentalform besitzt die **kovarianten Tensor-komponenten**

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.1.3)$$

Der \mathbb{R}^4 mit dieser Fundamentalform heißt **Minkowskiraum**. Im folgenden schreiben wir kontravariante Vektorkomponenten auch als Spaltenvektor

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}. \quad (1.1.4)$$

Die Fundamentalform definiert das **Minkowskiprodukt** zwischen zwei Vierervektoren:

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}, \quad (1.1.5)$$

wobei über gegenständige gleichnamige Indizes summiert wird (**Einsteinsche Summationskonvention**) und $\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$ das übliche Skalarprodukt im Euklidischen \mathbb{R}^3 bezeichnet. Die kovarianten Komponenten eines Vektors erhält man durch „Indexziehen“ mit dem Fundamentaltensor:

$$(x_\mu) = (g_{\mu\nu} x^\nu) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -\vec{x}^t), \quad (1.1.6)$$

wobei ein hochgestelltes t an einem Vektor oder einer Matrix die Transposition bezeichnet, d.h. \vec{x}^t ist der Zeilenvektor (x^1, x^2, x^3) .

Entsprechend werden mit $g^{\mu\nu}$ die kontravarianten Komponenten der Fundamentalform bezeichnet. Da für jeden Vektor

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} x_\sigma \quad (1.1.7)$$

gelten soll, muß notwendig

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu \end{cases}, \quad (1.1.8)$$

so daß

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.1.9)$$

ist.

Die Vektoren $x \in \mathbb{R}^4$ fallen in drei Klassen:

$$x \cdot x = x^2 \begin{cases} > 0 & \text{zeitartig,} \\ = 0 & \text{lichtartig,} \\ < 0 & \text{raumartig.} \end{cases} \quad (1.1.10)$$

Eine lineare Transformation des Minkowskiraums, der die Fundamentalform zwischen beliebigen Vektoren invariant läßt, heißt **Lorentztransformation**. Wie jede lineare Abbildung wird eine Lorentztransformation bzgl. einer Basis durch eine Matrix (Λ^μ_ν) repräsentiert, d.h. die kontravarianten Komponenten eines Vektors transformieren sich gemäß

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \quad (1.1.11)$$

Damit nun die Minkowskiprodukte zwischen beliebigen Vektoren ungeändert bleiben, muß gelten:

$$g_{\mu\nu} x'^\mu y'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} x^{\mu'} y^{\nu'} = g_{\mu'\nu'} x^{\mu'} y^{\nu'}. \quad (1.1.12)$$

Da wir dies für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^4$ verlangen, ist also notwendig

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} = g_{\mu'\nu'}. \quad (1.1.13)$$

Dafür können wir auch schreiben

$$(g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_{\mu'} g^{\mu'\sigma}) \Lambda^\nu_{\nu'} = \Lambda_\nu^\sigma \Lambda^\nu_{\nu'} = \delta_{\nu'}^\sigma. \quad (1.1.14)$$

Dies bedeutet, daß eine Lorentztransformation invertierbar ist und

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = \Lambda_\nu^\mu \quad (1.1.15)$$

sein muß. In Matrix-Vektorschreibweise bedeutet dies

$$\Lambda^{-1} = g \Lambda^t g, \quad (1.1.16)$$

Wobei wir Lorentztransformationsmatrizen immer als diejenige Form verstehen, wo der erste Index oben und der zweite Index unten stehen. Offenbar beschreibt umgekehrt auch jede Matrix Λ , die (1.1.16) erfüllt, eine Lorentztransformation.

Die Lorentztransformationen mit der Hintereinanderausführung (entsprechend der Matrixmultiplikation der dazugehörigen Matrizen) bilden eine Gruppe, denn mit zwei Lorentztransformationen Λ_1 und Λ_2 ist auch $\Lambda_1 \Lambda_2$ eine Lorentztransformation, denn wegen $g^2 = 1$ ist

$$g(\Lambda_1 \Lambda_2)^t g = g \Lambda_2^t \Lambda_1^t g = (g \Lambda_2^t g)(g \Lambda_1^t g) = \Lambda_2^{-1} \Lambda_1^{-1} = (\Lambda_1 \Lambda_2)^{-1}, \quad (1.1.17)$$

so daß $\Lambda_1 \Lambda_2$ die Bedingung (1.1.16) erfüllt.

Die physikalische Bedeutung der Lorentztransformationen wird unmittelbar einsichtig, wenn man die beiden wichtigsten Spezialfälle betrachtet, nämlich

- (i) Drehungen der rein räumlichen Basis eines beliebigen Orthonormalsystems und
- (ii) Gleichförmig geradlinige Bewegung eines solchen Bezugssystems gegen ein anderes („drehungsfreier Lorentzboost“).

Ein Beispiel für Drehungen ist eine Drehung um die 3-Achse um den Winkel $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$D_3(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1.18)$$

Ein drehungsfreier Lorentzboost entlang der 3-Achse besitzt die Parametrisierung

$$B_3(\eta) = \begin{pmatrix} \cosh \eta & 0 & 0 & -\sinh \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \eta & 0 & 0 & \cosh \eta \end{pmatrix}. \quad (1.1.19)$$

Dabei ist $\eta \in \mathbb{R}$. Um die physikalische Bedeutung der **Rapidität** η zu verstehen, wenden wir (1.1.19) auf die Komponenten eines beliebigen Vierervektors an:

$$x' = B_3(\eta)x = \begin{pmatrix} x^0 \cosh \eta - x^3 \sinh \eta \\ x^1 \\ x^2 \\ -x^0 \sinh \eta + x^3 \cosh \eta \end{pmatrix}. \quad (1.1.20)$$

Betrachten wir insbesondere den räumlichen Ursprung des Systems Σ' , indem wir $x'^1 = x'^2 = x'^3 = 0$ setzen. Aus (1.1.20) ersehen wir, daß dieser Punkt im System Σ die Koordinaten

$$x^1 = x^2 = 0, \quad x^3 = x^0 \tanh \eta = t \tanh \eta \quad (1.1.21)$$

besitzt. Das bedeutet, daß sich Σ' relativ zu Σ mit der Geschwindigkeit $v = \tanh \eta$ entlang der 3-Achse bewegt. Es ist stets $|\tanh \eta| < 1$. Mit Hilfe der folgenden Beziehung läßt sich der Boost (1.1.19) auch mit Hilfe der Geschwindigkeit v ausdrücken:

$$\cosh \eta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} := \gamma(v), \quad \sinh \eta = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = v\gamma(v). \quad (1.1.22)$$

In Analogie zu (1.1.18) bzw. (1.1.19) lassen sich Drehungen um eine beliebige räumliche Achse eines Orthonormalsystems bzw. Boosts entlang einer beliebigen räumlichen Richtung dieses Orthonormalsystems angeben. Wir werden später insbesondere Boosts in eine beliebige räumliche Richtung benötigen. Richtung und Geschwindigkeit des Boosts können wir durch einen dreidimensionalen Vektor \vec{v} mit $|\vec{v}| < 1$ charakterisieren. Dann lautet der Boost

$$B(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\vec{v}^t \gamma \\ -\vec{v} \gamma & 1 + (\gamma - 1) \vec{v} \otimes \vec{v} / v^2 \end{pmatrix}. \quad (1.1.23)$$

Dabei bezeichnet $\vec{a} \otimes \vec{b}$, das **dyadische Produkt** zwischen zwei Dreiervektoren, die Matrix mit den Elementen

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})_{ij} = a^i b^j, \quad (1.1.24)$$

und die Multiplikation mit einem Spaltenvektor von links bedeutet also

$$(\vec{a} \otimes \vec{b} \vec{c})_i = a^i b^j c^j = a_i \vec{b} \cdot \vec{c}. \quad (1.1.25)$$

Die Wirkung des Boosts (1.1.23) auf die Komponenten eines beliebigen Vierervektors ist also durch

$$B(\vec{v})x = \begin{pmatrix} \gamma(x^0 - \vec{v} \cdot \vec{x}) \\ \vec{x} - (\gamma - 1) \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{x}) / v^2 + \gamma \vec{v} x^0 \end{pmatrix} \quad (1.1.26)$$

gegeben. Wir bemerken weiter, daß die Drehungen um eine beliebige Achse sowie die Boosts entlang einer beliebigen Koordinatenrichtung jeweils **Einparameteruntergruppen der Lorentzgruppe** bilden, denn mit Hilfe der Additionstheoreme der trigonometrischen bzw. hyperbolischen Funktionen ergibt sich sofort

$$D_3(\phi_1)D_3(\phi_2) = D_3(\phi_1 + \phi_2), \quad B_3(\eta_1)B_3(\eta_2) = B_3(\eta_1 + \eta_2). \quad (1.1.27)$$

1.2 Das klassische Teilchenbild

In diesem Abschnitt wollen wir die eben besprochenen mehr mathematischen Begriffsbildungen auf einfachste physikalische Sachverhalte von Teilchen im Rahmen einer klassischen Punktteilchenbehandlung anwenden, indem wir Stoßprozesse betrachten. Dies wird uns als Anschauungsbeispiel bei der Entwicklung der entsprechenden quantentheoretischen Begriffe noch gute Dienste leisten.

1.2.1 Die relativistische Kinematik freier Punktteilchen

Prinzipiell kann die Formulierung der relativistischen Mechanik eines Punktteilchens nach Wahl eines beliebigen Inertialsystems genau wie die Newtonsche Mechanik durch die Beschreibung der Bahnen im dreidimensionalen Euklidischen Raum bzgl. des durch dieses Inertialsystem definierten Beobachters erfolgen. Dies ist aber insbesondere zur Formulierung grundlegender Naturgesetze nicht besonders bequem. Es empfiehlt sich hingegen, die Kinematik und Dynamik der Punktteilchen im vierdimensionalen Minkowskiraum zu betrachten.

Wir beschreiben also die Bewegung eines Teilchens als Trajektorie im vierdimensionalen Minkowskiraum, d.h. wir führen einen beliebigen Parameter λ für diese **Weltlinie** des Teilchens ein: $x^\mu = x^\mu(\lambda)$. Spezialisieren wir nun diese Beschreibung auf ein bestimmtes Inertialsystem, muß sich dieselbe Trajektorie auch umkehrbar eindeutig mit Hilfe der dazugehörigen Koordinatenzeit $t = x^0$ angeben lassen. Dies ist die schwächste Forderung an ein Kausalgesetz. Das bedeutet, daß die Trajektorie die Bedingung

$$\frac{dx^0(\lambda)}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda} > 0 \quad (1.2.1)$$

erfüllen muß. Wir verlangen der Bequemlichkeit halber das positive Vorzeichen, damit ein Anwachsen des Parameters λ der positiven Zeitrichtung entspricht.

Weiter ist klar, daß für jede eigentlich orthochrone Lorentztransformation Λ ebenfalls die Bedingung (1.2.1) gelten muß, also

$$\Lambda^0{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\lambda} > 0. \quad (1.2.2)$$

Wir wollen nun zeigen, daß dies nur dann gewährleistet ist, wenn $dx/d\lambda$ **zeit- oder lichtartig** ist.

Betrachten wir also zunächst einen raumartigen Vierervektor a , von dem wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit verlangen dürfen, daß sein räumlicher Teil in 3-Richtung weist, d.h. $a^1 = a^2 = 0$ und $a^3 > 0$ ist,¹ und wenden einen beliebigen Lorentzboost der Gestalt (1.1.19) an. Dann ist

$$a'^0 = a^0 \cosh \eta - a^3 \sinh \eta \quad (1.2.3)$$

Angenommen $a^0 > 0$. Da nach Voraussetzung der Raumartigkeit $a^2 = (a^0)^2 - (a^3)^2 < 0$, ist $0 > a^3 > a^0$. Verlangen wir also $a'^0 < 0$, müssen wir nur η so wählen, daß

$$a^0 \cosh \eta < a^3 \sinh \eta \Rightarrow \tanh \eta > a^0/a^3. \quad (1.2.4)$$

Da $a^0/a^3 < 1$ und $\tanh \eta \rightarrow 1$ für $\eta \rightarrow \infty$, ist eine solche Wahl von η stets möglich. Das bedeutet aber, daß in der Tat $dx/d\lambda$ für unsere Trajektorie nicht raumartig sein darf, damit stets (1.2.2) erfüllt ist. Genau dieselbe Betrachtung zeigt, daß man für licht- und zeitartige Vektoren a durch einen eigentlich orthochronen Lorentzboost das Vorzeichen der Zeitkomponente nicht ändern kann, da $|\tanh \eta| < 1$ für jedes reelle η , so daß also die Weltlinie eines Teilchens stets so beschaffen sein muß, daß die Tangenten überall zeit- oder lichtartig sind. Wir nennen solche Trajektorien im Minkowskiraum künftig einfach zeit- oder lichtartig.

Nehmen wir nun zunächst an, wir hätten eine zeitartige Trajektorie vorliegen. Greifen wir einen beliebigen Punkt, charakterisiert durch $\lambda = \lambda_0$ heraus, kann man stets einen Lorentzboost der Form (1.1.26) finden, so daß $d\vec{x}'/d\lambda|_{\lambda=\lambda_0} = 0$ ist. Dazu braucht man nur mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \left(\frac{dx_0}{d\lambda} \right)^{-1} \quad (1.2.5)$$

¹Ist das nicht der Fall, können wir zunächst eine räumliche Drehung anwenden, um dies zu erreichen.

zu boosten. Wegen der Zeitartigkeit der Trajektorie ist ja $|\vec{v}| < 1$! Dies ist das Ruhesystem des Teilchens, in dem es momentan (also zu dem durch $\lambda = \lambda_0$ gegebenen Zeitpunkt) ruht.

Wir können uns diese Lorentzboosts nun zu jedem Punkt entlang der Trajektorie ausgeführt denken. Dies definiert mit dem Teilchen mitbewegte Inertialsysteme, und man bezeichnet die in diesen Inertialsystemen gemessenen Zeitelemente $d\tau$ als die **Eigenzeitelemente** des Teilchens. Es wäre nun äußerst mühsam, diese Eigenzeitelemente für eine gegebene Trajektorie zu berechnen, wenn man all diese Lorentztransformationen tatsächlich ausführen müsste. Dies ist aber gar nicht notwendig, denn wir können aufgrund der Lorentzinvarianz $dx' = (d\tau, 0, 0, 0)$ schreiben

$$d\tau^2 = dx' \cdot dx' = dx \cdot dx, \quad (1.2.6)$$

und von einem beliebigen Ereignis λ_0 an gezählt vergeht also die Eigenzeit

$$\tau(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' \sqrt{\frac{dx}{d\lambda'} \frac{dx}{d\lambda'}}. \quad (1.2.7)$$

Da weiter offenbar $d\tau/d\lambda > 0$ ist, können wir auch die Eigenzeit des Teilchens selbst als Parameter der Weltlinie verwenden.

Dieses Konzept der Eigenzeit ist deshalb wichtig, weil es sich um eine relativistische Invariante handelt, die eine bequeme kovariante Formulierung der Teilchenkinematik und -dynamik erlaubt. Die kovariante Definition der kinematischen Größen **Geschwindigkeit und Beschleunigung** erfolgt daher in Bezug auf diese Eigenzeit des Teilchens:

$$u = \frac{dx}{d\tau}, \quad a = \frac{du}{d\tau} = \frac{d^2x}{d\tau^2}. \quad (1.2.8)$$

In den *nicht kovarianten, also auf ein Inertialsystem bezogenen* dreidimensionalen Größen geschrieben, gilt also

$$u = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}}. \quad (1.2.9)$$

Kovariante Bewegungsgleichungen lassen sich am bequemsten aus dem **Hamiltonschen Prinzip** in der Lagrangeformulierung bestimmen. Für freie Teilchen hat man als einzigen Vierervektor u zur Verfügung, um eine invariante Wirkung zu formulieren. Der einzige Skalar, der sich aus diesem bilden lässt, ist $u^2 = 1$, so daß für ein massives Teilchen

$$S_0[x] = -m \int d\tau = -m \int d\lambda \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda}} \quad (1.2.10)$$

der geeignete Ansatz für eine Wirkung darstellt. Wir haben im letzten Schritt die Wirkung wieder bzgl. eines beliebigen Weltparameters λ dargestellt, da die Eigenzeit selbst nicht unabhängig ist. Man kann als Weltparameter selbstverständlich auch die Koordinatenzeit t bzgl. eines beliebigen Inertialsystems wählen, denn die Wirkung ist unabhängig von dieser Parametrisierung der Weltlinie:

$$S_0[x] = -m \int dt \sqrt{1 - \dot{x}^2}. \quad (1.2.11)$$

Das Noethertheorem für die Invarianz unter zeitlichen und räumlichen Translationen liefert dann Energie respektive Impuls eines freien Teilchens:

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}}. \quad (1.2.12)$$

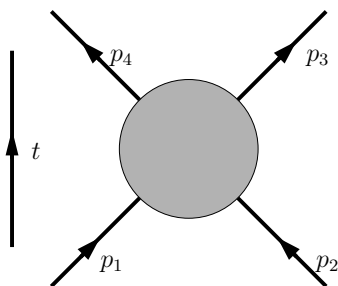
Mit (1.2.8) zeigt sich, daß Energie und Impuls zusammengenommen den Vierervektor

$$p = mu = m \frac{dx}{d\tau} \quad (1.2.13)$$

bilden. Die kovariante Beziehung zwischen Energie und Impuls lautet demnach

$$p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \Rightarrow |\vec{p}| = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}. \quad (1.2.14)$$

Damit können wir bereits die Kinematik für Stoßprozesse relativistischer Teilchen betrachten, die im folgenden noch wichtig sein wird. Der einfachste Fall ist ein Prozeß, wo zwei Teilchen X_1 und X_2 mit Viererimpulsen p_1 und p_2 aneinander streuen



(Anfangszustand) und zwei Teilchen X_3 und X_4 im Endzustand mit Viererimpulsen p_3 und p_4 resultieren. Dies können die gleichen Teilchen sein (also wieder X_1 und X_2), so daß also ein **elastischer Streuprozeß** betrachtet wird (z.B. die Elektron-Positron Streuung $e_+ + e_- \rightarrow e_+ + e_-$) oder man hat von den Ausgangsteilchen verschiedene Teilchen im Endzustand vorliegen (**inelastischer Streuprozeß**), z.B. Paarvernichtung $e_+ + e_- \rightarrow 2\gamma$. In jedem Falle müssen Energie- und Impulserhaltung in dem Streuprozeß gelten, was sich sogleich vierdimensional kovariant zusammenfassen läßt:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4. \quad (1.2.15)$$

Abbildung 1.1: Raumzeitdiagramm für die Streuung zweier Teilchen in zwei (gleiche oder verschiedene) andere Teilchen. Wir folgen der Konvention, daß die Zeit von unten nach oben aufgetragen wird, was sich später bei der diagrammatischen Formulierung (Feynman-Diagramme) der Störungstheorie noch als nützlich erweisen wird.

Weiter müssen die Energie-Impulsbeziehungen für die jeweiligen Teilchen erfüllt sein, wenn man sowohl die einlaufenden als auch die auslaufenden Teilchen weit ab vom Reaktionspunkt („Vertex“) betrachtet, wo die Wechselwirkung vernachlässigt werden kann (**asymptotisch freie Teilchen**):

$$p_1^2 = m_1^2, \quad p_2^2 = m_2^2, \quad p_3^2 = m_3^2, \quad p_4^2 = m_4^2. \quad (1.2.16)$$

Neben diesen invarianten Massen kann man nun noch drei weitere Invarianten aus den Viererimpulsen bilden, die man als **Mandelstamvariablen**² bezeichnet:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2. \quad (1.2.17)$$

Diese drei Invarianten sind jedoch nicht unabhängig voneinander. Vielmehr findet man durch Ausmultiplizieren der Minkowskiquadrate in (1.2.17) sowie Anwendung der Energie-Impulserhaltungsgleichung (1.2.15) und der Energie-Impulsbeziehungen (1.2.16)

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \quad (1.2.18)$$

1.2.2 Laborsystem

Für die Definition des **invarianten Streuquerschnitts** benötigen wir noch die Relativgeschwindigkeit der Teilchen im Anfangszustand. In der nichtrelativistischen Kinematik ist das einfach die vektorielle Differenz der Dreiergeschwindigkeiten. Dies ist aber im relativistischen Falle keine kovariante,

²benannt nach Stanley Mandelstam *1928

also vom Inertialsystem unabhängige Definition. Wir *definieren* daher die Relativgeschwindigkeit des Teilchens X_2 zum Teilchen X_1 als seine Geschwindigkeit im Ruhssystem des Teilchens X_1 . Dieses Bezugssystem bezeichnet man gemeinhin als **Laborsystem**, d.h. es gilt

$$p_1^{(\text{lab})} = \begin{pmatrix} m_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2^{(\text{lab})} = \begin{pmatrix} E_2^{(\text{lab})} \\ 0 \\ 0 \\ P_2^{(\text{lab})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_2^2 + (P_2^{(\text{lab})})^2} \\ 0 \\ 0 \\ P_2^{(\text{lab})} \end{pmatrix}, \quad (1.2.19)$$

wobei $P_2^{(\text{lab})}$ den Dreierimpulsbetrag des einlaufenden Teilchens X_2 bezeichnet und die Stoßrichtung in die Richtung der 3-Achse gelegt wurde. Die Relativgeschwindigkeit ist demnach definitionsgemäß

$$v_{\text{rel}} = \frac{P_2^{(\text{lab})}}{E_2^{(\text{lab})}}. \quad (1.2.20)$$

Dies läßt sich nun offensichtlich auch mit Hilfe kovarianter Ausdrücke schreiben. Aus p_1 und p_2 läßt sich nämlich die Invariante

$$p_1 p_2 = m_1 \sqrt{m_2^2 + (P_2^{(\text{lab})})^2} \quad (1.2.21)$$

bilden, und wir können (1.2.20) in der Form

$$v_{\text{rel}} := \frac{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2} \quad (1.2.22)$$

angeben. Im Laborsystem stimmt diese Definition mit (1.2.20) überein. Nun stellt zwar (1.2.22) keinen manifest kovarianten Ausdruck dar, wir werden aber sehen, daß mit Hilfe dieser Definition der Wirkungsquerschnitt manifest kovariant definiert werden kann. Außerdem kann man zeigen, daß für **kollineare Lorentzboosts**, also Lorentzboosts in Kollisionsrichtung (in unserer Konvention (1.2.19) also in 3-Richtung) tatsächlich gilt $v_{\text{rel}} = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$. Dies ist aber *nicht korrekt für beliebige Lorentzboosts, wenn also die Teilchen im betrachteten Bezugssystem nicht mehr kollinear aufeinandertreffen!*

Es ist weiter noch nützlich, einige Beziehungen zwischen den Mandelstamvariablen und den Größen im Laborsystem herzuleiten. Aus (1.2.19) und (1.2.17) folgt sofort

$$E_2^{(\text{lab})} = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2m_1}, \quad (1.2.23)$$

$$P_2^{(\text{lab})} = \sqrt{(E_2^{(\text{lab})})^2 - m_2^2} = \frac{\sqrt{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]}}{2m_1}. \quad (1.2.24)$$

Die Beziehung zum Endzustand läßt sich durch die Mandelstamvariablen t und u ausdrücken:

$$E_3^{(\text{lab})} = \frac{m_1^2 + m_3^2 - t}{2m_1}. \quad (1.2.25)$$

Zusammen mit (1.2.18) folgt

$$E_4^{(\text{lab})} = m_1 + E_2^{(\text{lab})} - E_3^{(\text{lab})} = \frac{m_1^2 + m_4^2 - u}{2m_1}. \quad (1.2.26)$$

Entsprechend ergeben sich schließlich die Impulse der auslaufenden Teilchen zu

$$\begin{aligned} p_3^{(\text{lab})} &= \frac{\sqrt{[(m_1 + m_3)^2 - t][(m_1 - m_3)^2 - t]}}{2m_1}, \\ p_4^{(\text{lab})} &= \frac{\sqrt{[(m_1 + m_4)^2 - u][(m_1 - m_4)^2 - u]}}{2m_1}. \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

1.2.3 Schwerpunktsystem

Das Schwerpunktsystem ist definiert als dasjenige System, in dem der Gesamtimpuls verschwindet:

$$p_1^{(\text{cm})} = \begin{pmatrix} E_1^{(\text{cm})} \\ \vec{p}_1^{(\text{cm})} \end{pmatrix}, \quad p_2^{(\text{cm})} = \begin{pmatrix} E_2^{(\text{cm})} \\ -\vec{p}_1^{(\text{cm})} \end{pmatrix}, \quad p_3^{(\text{cm})} = \begin{pmatrix} E_3^{(\text{cm})} \\ \vec{p}'^{(\text{cm})} \end{pmatrix}, \quad p_4^{(\text{cm})} = \begin{pmatrix} E_4^{(\text{cm})} \\ -\vec{p}'^{(\text{cm})} \end{pmatrix}. \quad (1.2.28)$$

Daraus wird sofort ersichtlich, daß die Mandelstamvariable s das Quadrat der Gesamtenergie im Schwerpunktsystem angibt:

$$s = (p_1^{(\text{cm})} + p_2^{(\text{cm})})^2 = (E_1^{(\text{cm})} + E_2^{(\text{cm})})^2 = (p_3^{(\text{cm})} + p_4^{(\text{cm})})^2 = (E_3^{(\text{cm})} + E_4^{(\text{cm})})^2. \quad (1.2.29)$$

Zusammen mit den Energie-Impulsbeziehungen ergibt sich für den Schwerpunktsimpulsbetrag im Eingang- bzw. Ausgangskanal

$$\begin{aligned} p^{(\text{cm})} &= \frac{\sqrt{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]}}{2\sqrt{s}}, \\ p'^{(\text{cm})} &= \frac{\sqrt{[s - (m_3 + m_4)^2][s - (m_3 - m_4)^2]}}{2\sqrt{s}}. \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

1.3 Das klassische elektromagnetische Feld

In diesem Abschnitt wollen wir in aller Kürze an die Elektrodynamik und ihre manifest kovariante relativistische Formulierung erinnern. Ausgangspunkt unserer Betrachtungen werden die **Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum** sein, wobei wir Ladungen und Ströme für Punktteilchen betrachten wollen. Wir werden alsbald an die Grenzen einer klassischen Theorie von Punktteilchen und Feldern stoßen, die erst in der quantisierten Theorie gelöst werden können, wenngleich nur im Sinne der Störungstheorie.

1.3.1 Die Maxwellgleichungen im Vakuum

Wir schreiben die Maxwellgleichungen für den einfachsten Fall des Vakuums auf, wobei wir uns des sogenannten **Heaviside-Lorentz'schen Einheitensystems** bedienen wollen. Dabei handelt es sich um ein rationalisiertes **Gauß'sches Einheitensystem**, welches vornehmlich in der theoretischen Hochenergiephysik gebräuchlich ist. Wir verwenden weiterhin auch die nützliche Konvention, Längen und Zeiten in derselben Einheit zu messen und $c = 1$ zu setzen. Die Maxwellgleichungen in ihrer ursprünglichen Form beschreiben die Dynamik von **elektrischen und magnetischen Feldern** \vec{E} und

\vec{B} bei vorgegebenen Ladungsverteilungen ρ und Stromdichteverteilungen \vec{j} . Bzgl. eines kartesischen Bezugssystems lauten sie

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (1.3.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \rho. \quad (1.3.2)$$

Die physikalische Bedeutung des elektrischen und magnetischen Feldes ergibt sich aus der durch sie verursachten Kraftwirkung auf Probeladungen. Auf eine Punktladung q wirkt demnach die **Lorentzkraft**

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.3.3)$$

Die Maxwellgleichungen zerfallen ihrer mathematischen Struktur nach in die in (1.3.1) wiedergegebenen **homogenen Maxwellgleichungen**, welche das **Faradaysche Induktionsgesetz** sowie die Nichtexistenz magnetischer Ladungsdichten beinhalten, sowie die inhomogenen Gleichungen (1.3.2), die die Erregung der Felder aus den elektrischen Ladungs- und Stromverteilungen beschreiben, also das um den **Maxwellschen Verschiebungsstrom** ergänzte **Ampèresche Durchflutungsgesetz** sowie das Gaußsche Gesetz umfassen.

Eine sehr wichtige Folgerung aus den inhomogenen Gleichungen ergibt sich, indem man die Divergenz des Ampère-Maxwellschen Durchflutungsgesetzes und dann in der entstehenden Gleichung die Zeitableitung des Gaußschen Gesetzes verwendet. Ohne Bezugnahme auf die Bewegungsgleichungen für die Ladungen und Ströme, die wir den Maxwellgleichungen hinzuzufügen hätten, wollten wir ein abgeschlossenes physikalisches System beschreiben, ergibt sich dann das Gesetz von der **Erhaltung der elektrischen Ladung**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (1.3.4)$$

Daß diese lokale Gleichung tatsächlich die Erhaltung der Ladung beinhaltet, erkennt man durch Integration dieser **Kontinuitätsgleichung** über ein beliebiges zeitlich unveränderliches Volumen V , dessen Berandungsfläche wir mit ∂V bezeichnen wollen und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes:

$$\frac{dQ_V}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V d^3 \vec{x} \rho(t, \vec{x}) = - \int_{\partial V} d^2 \vec{A} \cdot \vec{j}(t, \vec{x}). \quad (1.3.5)$$

Dabei haben wir die Flächennormalenvektoren $d^2 \vec{A}$ wie in der Vektoranalysis üblich aus dem betrachteten Volumen V herausgerichtet. Gl. (1.3.5) besagt aber nun, daß die zeitliche Änderung der im Volumen V befindlichen elektrischen Ladung allein durch den Fluß elektrischer Ladungen durch dessen Oberfläche verursacht sein kann. Dehnt man das Volumen auf den ganzen Raum \mathbb{R}^3 aus, ergibt sich auf der rechten Seite 0, da wir annehmen dürfen, daß die Stromdichte im Unendlichen hinreichend schnell verschwindet. Demnach ist also die Gesamtladung erhalten, d.h. $Q_{\mathbb{R}^3} = \text{const.}$

Die homogenen Gleichungen können durch die Einführung der **Elektrodynamischen Potentiale** identisch erfüllt werden. Dazu gehen wir von der Abwesenheit magnetischer Ladungen, also der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes, aus und folgern die Existenz eines **Vektorpotentials** für das magnetische Feld:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (1.3.6)$$

Diese Gleichung ins Faradaysche Induktionsgesetz eingesetzt liefert dann

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.3.7)$$

Folglich muß der Ausdruck in der Klammer durch ein Skalarpotential Φ darstellbar sein. Folglich läßt sich also das elektrische Feld durch

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \Phi \quad (1.3.8)$$

ausdrücken. Umgekehrt ist klar, daß bei beliebig vorgegebenen Potentialen Φ und \vec{A} die durch (1.3.6) und (1.3.8) definierten Felder \vec{B} und \vec{E} die homogenen Maxwellgleichungen identisch erfüllen.

Nun ist es aber auch klar, daß für vorgegebene Felder \vec{E} und \vec{B} die Potentiale Φ und \vec{A} nicht eindeutig bestimmt sind. Gemäß (1.3.6) können wir nämlich den Gradienten eines beliebigen Skalarfeldes χ zu \vec{A} hinzufügen:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \chi. \quad (1.3.9)$$

Um auch (1.3.8) bei vorgegebenem Feld \vec{E} zu genügen, müssen wir dann lediglich Φ durch

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (1.3.10)$$

ersetzen. Diese Symmetrie der durch die Potentiale ausgedrückten Gleichungen bezeichnet man als **Eichsymmetrie**. Sie wird bei der quantentheoretischen Behandlung der elektromagnetischen Erscheinungen noch eine herausragende Rolle spielen.

Wir wenden uns nun auch den inhomogenen Maxwellgleichungen zu. Setzen wir also (1.3.6) und (1.3.8) in die Gleichungen (1.3.2) ein, ergibt sich nach Verwendung der in kartesischen Koordinaten gültigen Identität

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} \quad (1.3.11)$$

die folgende Form des Maxwell-Ampéreschen Gesetzes:

$$\text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \square \vec{A} = \vec{j}, \quad (1.3.12)$$

wo wir den **d'Alembert-Operator**

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (1.3.13)$$

eingeführt haben.

Offenbar können wir nun (1.3.12) vereinfachen, wenn wir die Nebenbedingung

$$\text{div } \vec{A} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (1.3.14)$$

verlangen. Diese Freiheit läßt uns die oben festgestellte Eichinvarianz. Nehmen wir nämlich an, diese Bedingung sei nicht erfüllt, können wir neue Potentiale gemäß (1.3.9) und (1.3.10) wählen und verlangen, daß für sie (1.3.14) gilt. Dies ergibt für das Eichfeld χ die Forderung

$$\square \chi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div } \vec{A}. \quad (1.3.15)$$

Wir werden gleich sehen, daß wir für diese Gleichung stets eine Lösung angeben können. Freilich ist χ dadurch noch nicht eindeutig bestimmt, denn wir können immer noch eine Eichtransformation mit einem Eichfeld $\tilde{\chi}$ zulassen, für das $\square \tilde{\chi} = 0$ erfüllt ist. Die Nebenbedingung (1.3.14) schränkt dann

jedoch die Eichinvarianz auf solche Eichfelder ein. Daher nennt man (1.3.14) eine **Eichbedingung**. Diese spezielle Eichbedingung wird als **Lorenz-Eichbedingung** bezeichnet³. Wir dürfen also davon ausgehen, daß (1.3.14) erfüllt ist. Dann vereinfacht sich (1.3.12) zu einer einfachen Wellengleichung für jede der drei Komponenten des Vektorpotentials \vec{A} :

$$\square \vec{A} = \vec{j}. \quad (1.3.16)$$

Nunmehr benötigen wir nur noch das Gaußsche Gesetz in seiner Form für die Potentiale. Setzen wir also (1.3.8) in die letzte der Maxwellgleichungen (1.3.2) ein und verwenden wieder die Lorenz-Eichbedingung (1.3.14), finden wir

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} \Phi \right) = -\frac{\partial(\operatorname{div} \vec{A})}{\partial t} - \Delta \Phi = \rho \Rightarrow \square \Phi = \rho. \quad (1.3.17)$$

1.3.2 Die relativistisch kovariante Form der Maxwellgleichungen

Betrachten wir (1.3.16) und (1.3.17) stellen wir fest, daß wir sie in relativistisch kovarianter Form schreiben können, denn der d'Alembertoperator (1.3.13) kann wie folgt durch einen Lorentz-invarianten Operator ausgedrückt werden:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} := g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial^\mu \partial_\mu. \quad (1.3.18)$$

Um (1.3.16) und (1.3.17) durch eine manifest Lorentzkovariante Gleichung auszudrücken, müssen wir also nur noch Ladungs- und Stromdichte zu dem Vierervektor $(j^\mu) = (\rho, \vec{j})^t$ und die Potentiale zum Viererpotential $(A^\mu) = (\Phi, \vec{A})^t$ zusammenfassen. Damit reduzieren sich die Maxwellgleichungen, geschrieben mit Hilfe der Potentiale, zu der folgenden inhomogenen Wellengleichung für das Viererpotential:

$$\square A^\mu = j^\mu. \quad (1.3.19)$$

Freilich müssen sich nunmehr auch das elektrische und magnetische Feld und die bzgl. dieser physikalischen Größen geschriebenen Maxwellgleichungen relativistisch kovariant ausdrücken lassen. Wir könnten die oben durchgeführten Schritte nunmehr einfach durch die Komponenten des Viererpotentials ausdrücken und die kovariante Form ablesen. Wesentlich einfacher ist es jedoch, die allgemeine Kovarianz und die **Eichinvarianz** zu Hilfe zu nehmen, um die relativistisch kovariante Form der Felder zu ermitteln. Gemäß (1.3.6) und (1.3.8) sind die Felder durch Ableitungen nach den Raumzeitvariablen gegeben. Durch Ableitungen lassen sich aus den Vierervektorkomponenten die Tensorkomponenten $\partial_\mu A_\nu$ gewinnen. Weiter muß nun aber auch die Eichinvarianz der Felder gewährleistet sein. Die Eichtransformation (1.3.9) und (1.3.10) liest sich kovariant geschrieben wie folgt:

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi. \quad (1.3.20)$$

Auf den tieferen Grund für die wesentliche Vereinfachung dieser Gleichungen im manifest kovarianten Kalkül werden wir im nächsten Kapitel noch zurückkommen, denn die Eichinvarianz hängt eng

³Für die historischen Gründe, warum wir hier dem neueren Sprachgebrauch folgen und die Eichbedingung nach dem dänischen Physiker Ludwig Lorenz und nicht nach dem holländischen Physiker Hendrik Antoon Lorentz benennen vgl. [JO01]

mit der **Darstellungstheorie der Poincarégruppe** zusammen, die wir zum Ausgangspunkt nehmen wollen, um eine manifest kovariante relativistische Quantentheorie zu formulieren.

Aus den og. Tensorkomponenten läßt sich nun aber sofort ein eichinvarianter Ausdruck gewinnen, nämlich der **Faraday- oder Feldstärketensor**:

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.3.21)$$

Als total antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe besitzt dieser Tensor auch gerade sechs unabhängige Komponenten, entsprechend den sechs Feldfreiheitsgraden \vec{E} und \vec{B} im „Dreierformalismus“. Den Zusammenhang zu \vec{E} und \vec{B} können wir durch Zerlegung in zeitliche und räumliche Komponenten ersehen:

$$\begin{aligned} F_0{}^n &= \partial_0 A^n - \partial^n A_0 = \frac{\partial A^n}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^n} = -E_n, \\ F_m{}^n &= \partial_m A^n - \partial^n A_m = \frac{\partial A^n}{\partial x^m} - \frac{\partial A^m}{\partial x^n} = \epsilon_{mnr} (\text{rot } \vec{A})_r = \epsilon_{mnr} B^r. \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

Relativistisch gesehen haben wir es also nicht mit zwei getrennten elektrischen und magnetischen Feldern zu tun, handelt es sich doch lediglich um Komponenten des kovarianten Faradaytensors. Wir sprechen daher auch lieber vom elektromagnetischen Feld oder der elektromagnetischen Wechselwirkung. Besonders übersichtlich ergibt sich der Zusammenhang zwischen elektrischem und magnetischem Feld und dem kovarianten Feldstärketensor mittels ko- oder kontravarianten Komponenten, wo er als antisymmetrische Matrix wie folgt geschrieben werden kann:

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3.23)$$

Das Transformationsverhalten der elektromagnetischen Feldgrößen unter Lorentztransformationen ist nunmehr ebenfalls offensichtlich. Das Viererpotential transformiert sich als Vektorfeld. Ist also der Wechsel von einem Inertialsystem zu einem anderen durch die Lorentztransformation gemäß (1.1.11), d.h. im Matrizenkalkül $x' = \Lambda x$, gegeben, lauten die Komponenten des Viererpotentialfeldes im neuen Bezugssystem

$$A'(x') = \Lambda A(x) = \Lambda A(\Lambda^{-1}x'). \quad (1.3.24)$$

Eine physikalische Größe mit einem solchen Transformationsverhalten bezeichnen wir als **Vierervektorfeld**. Entsprechend transformiert sich der Feldstärketensor gemäß

$$F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1}x'), \quad (1.3.25)$$

also wie ein **Tensorfeld zweiter Stufe**. Insbesondere ergibt sich daraus für einen drehungsfreien Boost (1.1.23) für die elektrischen und magnetischen Feldkomponenten

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= (\vec{n}\vec{E})\vec{n} + \frac{\vec{n} \times (\vec{E} \times \vec{n}) - \vec{v} \times \vec{B}}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ \vec{B}' &= (\vec{n}\vec{B})\vec{n} + \frac{\vec{n} \times (\vec{B} \times \vec{n}) + \vec{v} \times \vec{E}}{\sqrt{1 - v^2}}. \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

Nun wollen wir noch die Maxwellgleichungen in kovarianter Form mittels des Feldstärketensors schreiben. Dies hat den Vorteil, daß es sich um eichinvariante Gleichungen handelt. Die Maxwellgleichungen (1.3.1) müssen sich als Differentialgleichungen 1. Ordnung des Feldstärketensors ausdrücken lassen. Aus dem Faradaytensor läßt sich durch **Hodge-Dualisierung** ein zweiter antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe bilden, nämlich

$$(F^\dagger)^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (1.3.27)$$

Dabei sind die Komponenten des **Levi-Civita-Tensors** dadurch definiert, daß $\epsilon^{0123} = 1$ und das Symbol ansonsten total antisymmetrisch unter Vertauschung seiner vier Indizes sein soll. Der Levi-Civita-Tensor ist übrigens nur ein Tensor bzgl. unimodularer Transformationen, also solchen Transformationen mit Determinante 1, hinsichtlich der Lorentzgruppe also nur bzgl. der $SO(1,3)$, denn offenbar gilt für beliebige Transformationsmatrizen Λ

$$\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} \Lambda^\rho_{\rho'} \Lambda^\sigma_{\sigma'} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = \det \Lambda \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (1.3.28)$$

Unter allgemeinen linearen Transformationen handelt es sich genau genommen um eine Tensordichte. Für die total kovarianten Komponenten gilt aufgrund derselben Überlegung

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \det g \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (1.3.29)$$

Es ist wichtig zu betonen, daß die hier festgelegte Konvention nicht einheitlich in der Literatur eingehalten wird, so daß bei Vergleich von Formeln aus verschiedenen Quellen Vorsicht geboten ist. Wir folgen der Konvention in [PS95].

Wir können nun also aus dem Faradaytensor und seinem Dual durch Kontraktion mit dem Vierergradienten ∂_μ zwei Vektorausdrücke bilden. Aufspalten dieser Gleichungen in räumliche und zeitliche Komponenten und Vergleich mit den Maxwellgleichungen (1.3.1-1.3.2) ergibt dann deren relativistisch kovariante Form

$$\partial_\mu (F^\dagger)^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (1.3.30)$$

Die Kontinuitätsgleichung (1.3.4), die wie oben gezeigt dem Satz von der Erhaltung der elektrischen Ladung entspricht, ergibt sich aus der zweiten Gleichung sofort durch weitere Kontraktion mit ∂_ν und der Tatsache, daß der Feldstärketensor antisymmetrisch ist:

$$\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (1.3.31)$$

Wir wenden uns nun einigen einfachsten Grundlagen der Lösungstheorie der Maxwellgleichungen, die uns später in der Quantenfeldtheorie noch nützlich sein werden, zu.

1.3.3 Lösung der quellenfreien Maxwellgleichungen

Beginnen wir mit dem Fall des ladungs- und stromfreien Raums, also der Form sich im freien Raum ausbreitender elektromagnetischer Wellen. Betrachten wir dazu die Wellengleichung (1.3.19) für das Viererpotential, wobei allerdings darauf zu achten ist, daß die Lorenz-Eichbedingung (1.3.14) als Nebenbedingung erfüllt sein muß. Kovariant geschrieben lautet sie

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (1.3.32)$$

Wie im Anschluß an (1.3.15) bemerkt, legt jedoch diese Bedingung das Viererpotential noch nicht eindeutig fest. Vielmehr haben wir noch die Freiheit, durch eine Eichtransformation $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \tilde{\chi}$

eine Komponente des Viererpotentials zu eliminieren. Um auch dies Lorentz-kovariant zu formulieren, verlangen wir

$$n_\mu A^\mu = 0, \quad (1.3.33)$$

wobei n^μ ein von 0 verschiedener Vierervektor ist. Je nach Wahl eines zeit- oder raumartigen Vektors nennt man eine solche Eichbedingung eine zeit- bzw. raumartige Eichbedingung. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, ist eine natürliche Wahl $(n^\mu) = (1, 0, 0, 0)$. Dann verlangen wir also $A^0 = \Phi = 0$. Diese Wahl nennt man in der Literatur auch die **Strahlungseichung**. Zusammen mit (1.3.32) folgt daraus, daß in dieser Eichung auch

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (1.3.34)$$

gilt.

Schreiben wir nun das verbliebene Dreierpotential in Form eines Fourierintegrals

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})} \vec{a}(t, \vec{k}) \exp(i\vec{k}\vec{x}) \quad \text{mit} \quad \omega(\vec{k}) = |\vec{k}| \quad (1.3.35)$$

folgt für die Komponenten⁴

$$(\partial_t^2 + \vec{k}^2) \vec{a} = 0, \quad (1.3.36)$$

also

$$\vec{a}(t, \vec{k}) = \vec{a}_1(\vec{k}) \exp[-i\omega(\vec{k})t] + \vec{a}_2(\vec{k}) \exp[+i\omega(\vec{k})t] \quad \text{mit} \quad \omega(\vec{k}) = |\vec{k}|. \quad (1.3.37)$$

Die Nebenbedingung (1.3.34) verlangt dann nur noch

$$\vec{k} \cdot \vec{a}_j(\vec{k}) = 0, \quad (1.3.38)$$

Seien also $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \alpha)$ mit $\alpha \in \{1, 2\}$ zwei zu \vec{k} senkrechte voneinander linear unabhängige reelle **Polarisationsvektoren**, so ist die allgemeine Lösung der quellenfreien Maxwellgleichungen (in **Strahlungseichung**) also durch (1.3.35) mit

$$\vec{a}(t, \vec{k}) = \sum_{\alpha=1}^2 \vec{\epsilon}(\vec{k}, \alpha) \left\{ A_{1,\alpha}(\vec{k}) \exp[-i\omega(\vec{k})t + i\vec{k}\vec{x}] + A_{2,\alpha}(\vec{k}) \exp[+i\omega(\vec{k})t + i\vec{k}\vec{x}] \right\} \quad (1.3.39)$$

gegeben. Für das Folgende ist es bequem, diese Vektoren zueinander orthogonal zu wählen, und zwar so, daß für $\alpha \in \{1, 2\}$

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, \alpha) \cdot \vec{\epsilon}(\pm\vec{k}, \alpha') = (\pm 1)^\alpha \delta_{\alpha\alpha'} \quad (1.3.40)$$

und

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1) \times \vec{\epsilon}(\vec{k}, 2) = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} := \hat{\vec{k}}, \quad \vec{\epsilon}(-\vec{k}, \alpha) = (-1)^\alpha \vec{\epsilon}(\vec{k}, \alpha) \quad (1.3.41)$$

gelten. Jedenfalls zeigt (1.3.39), daß nur zwei der ursprünglich vier Komponenten des Viererpotentials physikalisch sind, nämlich zwei voneinander linear unabhängige **transversal polarisierten Wellen**. Um (1.3.35) wenigstens hinsichtlich der Integration und der Exponentialfunktionen kovariant zu machen, können wir dies auch in der Form

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})} \sum_{\alpha=1}^2 \vec{\epsilon}(\vec{k}, \alpha) \left\{ A_\alpha(\vec{k}) \exp[-i\vec{k}\vec{x}] + B_\alpha(\vec{k}) \exp[+i\vec{k}\vec{x}] \right\}_{k^0 = \omega(|\vec{k}|)} \quad (1.3.42)$$

mit $A_\alpha(\vec{k}) = A_{1,\alpha}(\vec{k}), \quad B_\alpha(\vec{k}) = A_{2,\alpha}(-\vec{k})$

⁴Der Sinn für die spezifische Wahl des Integralmaßes wird sogleich noch deutlich werden.

schreiben. Das Integralmaß können wir in der Gestalt

$$\frac{d^3\vec{k}}{2\omega(\vec{k})} = d^4k \Theta(k^0) \delta(k^2) \quad (1.3.43)$$

schreiben. Daraus ergibt sich, daß dieses Integralmaß invariant unter eigentlich orthochronen Lorentz-Transformationen ist.

Da die A^μ reelle Felder sind, muß bei reeller Wahl von $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \alpha)$ noch gelten

$$B_\alpha(\vec{k}) = A_\alpha^*(\vec{k}). \quad (1.3.44)$$

Die endgültige Form der Lösung der freien Maxwellgleichungen lautet somit also

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})} \sum_{\alpha=1}^2 \vec{\epsilon}(\vec{k}, \alpha) \left\{ A_\alpha(\vec{k}) \exp[-ikx] + A_\alpha^*(\vec{k}) \exp[+ikx] \right\}_{k^0=\omega(|\vec{k}|)} \quad (1.3.45)$$

Die spezifische Gestalt von $A_\alpha(\vec{k})$ muß durch Anfangsbedingungen festgelegt werden. Wir werden jedoch für die Quantenfeldtheorie lediglich diese allgemeine Lösungsform der freien Maxwellgleichungen benötigen.

1.3.4 Lösung der Maxwellgleichungen bei vorgegebenen Quellen

Wenden wir uns nun der Lösung der Maxwellgleichungen bei vorgegebenen Ladungen und Strömen zu. In Lorenz-Eichung haben wir lediglich die Wellengleichung (1.3.19) zu lösen. Wir gelangen zum Ziel, wenn wir eine **Greensche Funktion des d'Alembert-Operators** finden können, d.h. eine Funktion G , die

$$\square_x G(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') \quad (1.3.46)$$

erfüllt. Dann wird (1.3.19) offenbar durch

$$A^\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x' G(x - x') j^\mu(x') \quad (1.3.47)$$

gelöst. Daß wir die Greensche Funktion in der spezifischen Gestalt als Funktion von $x - x'$ ansetzen können, ergibt sich daraus, daß die rechte Seite von (1.3.46) lediglich von dieser Koordinatendifferenz abhängt. Wir suchen ohnehin nur eine partikuläre Lösung der Gleichung. Die Greensche Funktion selbst ist freilich nur bis auf eine Funktion, die die quellenfreie Wellengleichung erfüllt, bestimmt.

Hier wollen wir die **retardierte Greensche Funktion** aufsuchen, die der physikalischen Situation entspricht, daß zu einer bestimmten Zeit t_0 irgendwelche Quellen "eingeschaltet," werden. Die Kausalitätsbedingung der Physik verlangt dann, daß A^μ (genauer gesagt die eichinvarianten Feldkomponenten $F_{\mu\nu}$!) **retardierte Funktionale der Quellen** sein müssen, d.h. $A^\mu(t, \vec{x})$ kann nur von den Quellen zu früheren Zeiten $t' < t$ abhängen. Dies wird durch den Ansatz

$$G(x - x') = \Theta(t - t') g(x - x') \quad (1.3.48)$$

erreicht. Wie wir gleich sehen werden, bestimmt dies g eindeutig.

Um G zu finden, setzen wir $z = x - x'$ und schreiben

$$G(z) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \tilde{G}(z^0, \vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{z}). \quad (1.3.49)$$

Aus (1.3.46) folgt dann

$$\left(\frac{d^2}{d(z^0)^2} + \vec{k}^2 \right) \tilde{G}(z^0, \vec{k}) = \delta(z^0). \quad (1.3.50)$$

Außer bei $z^0 = 0$ besitzt die Gleichung die Lösung

$$\tilde{G}(z^0, \vec{k}) = A \exp[-i\omega(\vec{k})z^0] + B \exp[+i\omega(\vec{k})z^0], \quad (1.3.51)$$

wobei A und B für $z^0 < 0$ und $z^0 > 0$ jeweils unabhängig zu bestimmende Konstanten sind. Wegen des Ansatzes (1.3.48) ist $A = B = 0$ für $z^0 < 0$. Wir dürfen weiter annehmen, daß $\tilde{G}(z^0, \vec{k})$ als Funktion von z^0 bei $z^0 = 0$ stetig ist. Durch Integration von (1.3.50) bzgl. z^0 über ein sehr kleines Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ ergibt sich daraus die Sprungbedingung für die Ableitung:

$$\frac{d}{dz^0} \tilde{G}(0^+, \vec{k}) - \frac{d}{dz^0} \tilde{G}(0^-, \vec{k}) = 1. \quad (1.3.52)$$

Dies in (1.3.51) eingesetzt, ergibt

$$A + B = 0, \quad -i(A - B)\omega(\vec{k}) = 1, \quad (1.3.53)$$

d.h.

$$A = -B = \frac{i}{2\omega(\vec{k})}. \quad (1.3.54)$$

Es ist also

$$G(z) = i\Theta(z^0) \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})} \left\{ \exp[i\vec{k}\vec{z} - i\omega(\vec{k})z^0] - \exp[i\vec{k}\vec{z} + i\omega(\vec{k})z^0] \right\}. \quad (1.3.55)$$

Dieses Integral existiert freilich nicht im üblichen Sinne und ist als Distribution aufzufassen, wie es für eine Greensche Funktion i.a. auch zu erwarten ist. Jedenfalls ist sie ein **Skalar** unter eigentlich orthochronen Lorentztransformationen. Die Distribution läßt sich in geschlossener Form berechnen. Dazu wählen wir für die \vec{k} -Integration ein Kugelkoordinatensystem (K, ϑ, φ) mit der Polarrichtung in Richtung von \vec{z} und führen einen regulierenden Faktor $\exp(-\epsilon K)$ ($\epsilon > 0$) ein. Dann ist

$$g(z) = \frac{i}{8\pi^2} \int_0^\infty dK K \int_{-1}^1 du \exp(-\epsilon K) [\exp(iKz u - iKz^0) - \exp(iKz u + iKz^0)], \quad (1.3.56)$$

wobei wir $K := |\vec{k}| = \omega(\vec{k})$ benutzt, $u = \cos \vartheta$ gesetzt und die triviale Integration über φ ausgeführt haben. Bei endlichem Regulator $\epsilon > 0$ ist

$$g(z) = \frac{1}{4\pi^2 z} \left[\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (z_0 - z)^2} - \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (z_0 + z)^2} \right]. \quad (1.3.57)$$

Für $\epsilon \rightarrow 0^+$ ergibt sich

$$g(z) = \frac{1}{4\pi z} [\delta(z_0 - z) - \delta(z_0 + z)]. \quad (1.3.58)$$

Es ist also wegen $z = |\vec{z}| \geq 0$

$$G(z) = \frac{1}{4\pi z} \delta(z_0 - z) \quad (1.3.59)$$

oder kovariant geschrieben

$$G(z) = \frac{1}{2\pi} \Theta(z_0) \delta(z_\mu z^\mu). \quad (1.3.60)$$

Setzen wir (1.3.59) in (1.3.47) ein, ergibt sich schließlich die gesuchte Lösung der Maxwellgleichungen bei vorgegebenen Ladungs- und Stromverteilungen:

$$A^\mu(t, \vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \frac{j^\mu(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (1.3.61)$$

wobei charakteristischerweise die Quellen zu dem zum betrachteten Aufpunkt \vec{x} gehörigen **retardierten Zeitpunkt**

$$t_{\text{ret}} = t - |\vec{x} - \vec{x}'| \quad (1.3.62)$$

zu nehmen sind, zeitliche Änderungen des elektromagnetischen Feldes aufgrund sich zeitlich ändernder Quellen also mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Daher wird die hier betrachtete Greensche Funktion genauer auch als **retardierte Greensche Funktion** und die Potentiale (1.3.61) als die **retardierten Potentiale** bezeichnet. Wir werden später noch mit andersartigen Greenschen Funktionen zu tun haben, die sich von der retardierten durch eine Lösung der homogenen Wellengleichung unterscheiden.

Wir müssen schließlich noch die innere Konsistenz unserer Herleitung sicherstellen, indem wir nachweisen, daß die Lorenz-Eichbedingung (1.3.32) erfüllt ist. Dazu schreiben wir (1.3.61) in der unintegrierten Form

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x' \frac{\partial}{\partial x^\mu} G(x - x') j^\mu(x') = - \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x' j^\mu(x') \frac{\partial}{\partial x'^\mu} G(x - x') \\ &= + \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x' G(x - x') \frac{\partial j^\mu(x')}{\partial x'^\mu} = 0. \end{aligned} \quad (1.3.63)$$

Im letzten Schritt haben wir die für die Lösbarkeit der Maxwellgleichungen notwendige Kontinuitätsgleichung (1.3.31), die dem Gesetz von der Erhaltung der elektrischen Ladung entspricht, verwendet. Hieraus wird bereits der enge Zusammenhang der Kontinuitätsgleichung für den Strom und der Eichinvarianz deutlich. Wir werden im nächsten Abschnitt diesen Zusammenhang aus Sicht des **Noetherschen Theorems** noch genauer ausarbeiten.

1.3.5 Kanonische Formulierung der Elektrodynamik

Wie jedes dynamische System können auch die elektromagnetischen Felder und ihre Quellen mit Hilfe des Hamiltonschen kanonischen Formalismus behandelt werden. Dabei wird das **Prinzip der kleinsten Wirkung** herangezogen, um die Feldgleichungen mittels eines **Variationsprinzips** zu formulieren. Dies hat zum einen den Vorteil, daß wir auf dem Wege der „**kanonischen Quantisierung**“ recht schnell zu einer Quantentheorie der Felder gelangen können, zum anderen ermöglicht es dieses Vorgehen auch, daß wir wichtige **Observablen** des Systems wie Energie, Impuls und Drehimpuls aus dem durch das **Noether-Theorem** gegebenen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen ableiten können. Es sei bereits hier betont, daß die kanonische Quantisierung mehr als ein heuristisches Prinzip als eine systematische Herleitung einer Quantentheorie aus einer klassischen Theorie anzusehen ist. Wir werden daher im nächsten Kapitel nochmals die relativistische Quantentheorie aus gruppentheoretischer Sicht systematisch zu behandeln haben.

Wir gehen vom Viererpotential als elementarem Feld zur Beschreibung des elektromagnetischen Feldes aus. Das Wirkungsfunktional für die freien Felder sollte ein quadratisches Funktional sein. Setzen wir es als Lorentz-invariante Größe an, können wir zudem sicher sein, daß wir kovariante Gleichungen erhalten. Außerdem sollte die Wirkung auch eichinvariant sein. Dies legt es nahe, für das freie Feld den Ansatz

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.3.64)$$

zu wählen. In der Tat, variieren wir das Wirkungsfunktional

$$S_0[A_\mu] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \mathcal{L}_0, \quad (1.3.65)$$

erhalten wir

$$\delta S_0 = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu). \quad (1.3.66)$$

Vertauschen wir im letzten Term die Summationsindizes und verwenden die Antisymmetrie des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$, ergibt sich nach einer partiellen Integration

$$\delta S_0 = - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu = + \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \delta A^\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}. \quad (1.3.67)$$

Da wir weiter dem Hamiltonschen Prinzip gemäß die A^ν unabhängig voneinander variieren dürfen, wird die Wirkung also stationär, wenn

$$\delta S = 0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (1.3.68)$$

ist, und das sind in der Tat die Maxwellgleichungen (1.3.30), denn der ersten Gleichung ist bereits durch den Ansatz des Feldstärketensors als Viererrotation eines Vektorpotentials Rechnung getragen, und die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen geben die zweite Gleichung für den quellenfreien Raum ($j^\mu = 0$).

Der Wechselwirkung mit vorgegebenen äußeren Quellen j^μ wird durch Hinzufügen des Terms

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -A_\nu j^\nu \quad (1.3.69)$$

Rechnung getragen. Denn dann ist die Variation der Wirkung durch

$$\delta S = \delta S_0 + \delta S_{\text{int}} = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \delta A^\nu (\partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu) \quad (1.3.70)$$

gegeben, und das Hamiltonsche Prinzip verlangt das Verschwinden der Klammer, also

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (1.3.71)$$

und das ist in der Tat die kovariant geschriebene Form der inhomogenen Maxwellgleichungen (1.3.30). Wir müssen weiter noch die Eichinvarianz des Wirkungsfunktionals überprüfen⁵. Das freie Funktional S_0 ist eichinvariant, denn es hängt nur vom eichinvarianten Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ ab. Der Wechselwirkungsterm (1.3.69) verlangt allerdings eine gesonderte Untersuchung, denn hier tritt das Vektorpotential selbst auf. Führen wir also eine Eichtransformation (1.3.20) durch, wobei die äußeren Quellen ungeändert bleiben. Nun ist

$$S_{\text{int}}[A'_\mu] = - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x A'_\mu j^\mu = - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x (A_\mu + \partial_\mu \chi) j^\mu = - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x (A_\mu j^\mu - \chi \partial_\mu j^\mu). \quad (1.3.72)$$

⁵Um eichinvariante Gleichungen zu erhalten, genügt es streng genommen, daß die Variation der Wirkung eichinvariant ist. Daß das Wirkungsfunktional selbst eichinvariant ist, ist dafür zwar hinreichend aber nicht notwendig.

Dies stimmt für beliebige χ nur dann mit $S_{\text{int}}[A_\mu]$ überein, wenn

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (1.3.73)$$

also j^μ ein erhaltener Strom ist. Dies haben wir ja bereits oben mehrfach festgestellt: Die Maxwellgleichungen sind nur konsistent, wenn der elektromagnetische Viererstrom die Kontinuitätsgleichung (1.3.73) erfüllt.

1.3.6 Das Noether-Theorem

Wir wenden uns nun dem für das folgende wichtigen Zusammenhang zwischen **Symmetrien der Wirkung und Erhaltungssätzen** zu. Wie wir nämlich sogleich sehen werden, zieht jede kontinuierliche Symmetrie des Wirkungsfunktionalen einen Erhaltungssatz nach sich und gestattet die Definition so wichtiger Größen wie Impuls, Energie und Drehimpuls vermöge der Poincaréinvarianz der relativistischen Dynamik.

Betrachten wir also eine „infinitesimale“ Symmetrietransformation der Raumzeitkoordinaten und Felder von der Form

$$x'^\mu = x^\mu + \delta\eta^a t_a^\mu(x), \quad A'^\mu(x') = A^\mu(x) + \delta\eta^a T_a^\mu[A(x)]. \quad (1.3.74)$$

Dabei sind die $\delta\eta^a$ irgendwelche infinitesimale voneinander unabhängige Parameter, die die Transformation festlegen (z.B. Winkelkoordinaten bei Rotationen und dgl.). Zur Berechnung der Variation der Wirkung benötigen wir zunächst die Variation der Ableitung der Felder, die nicht wie beim Hamiltonschen Prinzip mit dem Ableitungsoperator vertauscht, da nun ja die Raumzeit-Koordinaten selbst mitvariiert werden. Es gilt

$$\delta(\partial_\nu A^\mu) = \partial'_\nu A'^\mu(x') - \partial_\nu A^\mu(x) = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \partial_\rho A'^\mu(x') - \partial_\nu A^\mu(x). \quad (1.3.75)$$

Nun ist bis auf Größen von der Ordnung $\mathcal{O}(\delta\eta^2)$

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = \delta^\rho_\nu - \delta\eta^a \partial_\nu t_a^\rho, \quad (1.3.76)$$

wovon man sich leicht dadurch überzeugt, daß dieser Ausdruck bis auf Größen der Ordnung $\mathcal{O}(\delta\eta^2)$ die Identität

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = \delta^\rho_\sigma \quad (1.3.77)$$

erfüllt. Verwenden wir also (1.3.74) und (1.3.76) in (1.3.75), finden wir schließlich

$$\delta(\partial_\nu A^\mu) = \delta\eta^a \left\{ \partial_\nu T_a^\mu[A(x)] - [\partial_\nu t_a^\rho(x)](\partial_\rho A^\mu) \right\}. \quad (1.3.78)$$

Wir benötigen nun noch die Variation des Vierervolumenelements

$$\delta d^4x = d^4x' - d^4x = \left[\det \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) - 1 \right] d^4x. \quad (1.3.79)$$

Dazu denken wir uns die Determinante in Form der Matrixelemente hingeschrieben. Es ist klar, daß bis auf Größen der Ordnung $\mathcal{O}(\delta\eta^2)$ nur das Produkt der Diagonalelemente beiträgt. Es folgt schließlich

$$\delta d^4x' = \delta\eta^a \partial_\mu t_a^\mu d^4x. \quad (1.3.80)$$

Unter Verwendung von (1.3.76, 1.3.78 und 1.3.80) finden wir schließlich nach einigen elementaren Umformungen und partiellen Integrationen, wobei wir annehmen, daß der Integrand für $x \rightarrow \infty$ hinreichend schnell verschwindet, für die Variation der Wirkung

$$\delta S = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \delta \eta^a \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\mu)} \right] T_a^\mu + \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\rho)} \partial_\mu A^\rho - \mathcal{L} \delta_\mu^\nu \right] t_a^\mu \right\}. \quad (1.3.81)$$

Da die $\delta \eta^a$ voraussetzungsgemäß voneinander unabhängig sind, muß das Integral für jedes a verschwinden, wenn eine Symmetrie vorliegen soll, und zwar unabhängig vom Feld A^μ , und das bedeutet, daß der Ausdruck in der geschweiften Klammer als Viererdivergenz eines Stromes j_a^σ zu schreiben sein muß:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\mu)} \right] T_a^\mu + \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\rho)} \partial_\mu A^\rho - \mathcal{L} \delta_\mu^\nu \right] t_a^\mu = \partial_\sigma j_a^\sigma. \quad (1.3.82)$$

Führen wir die **Variationsableitung** der Wirkung vermöge

$$\frac{\delta S}{\delta A^\mu} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\mu)} \quad (1.3.83)$$

ein, sehen wir, daß nach Ausführung der Ableitung ∂_ν (1.3.82) in der Form

$$\frac{\delta S}{\delta A^\mu} (T_a^\mu - t_a^\mu) = \partial_\nu j_a^\nu \quad (1.3.84)$$

geschrieben werden kann.

Da sich nun weiter die Feldgleichungen gerade aus der Stationarität des Wirkungsfunktionalis unter Variation der A^μ ergeben, d.h. dem Verschwinden der Variationsableitung (1.3.83), folgt sofort, daß **für Lösungen der Feldgleichungen**

$$\partial_\nu j_a^\nu = 0 \quad (1.3.85)$$

gilt. Dies ist der Inhalt des **Noether-Theorems** [Noe18]:

Zu jeder Einparameteruntergruppe einer Liegruppendarstellung auf den Feldern und Raumzeitkoordinaten, bzgl. der die Wirkung invariant bleibt, existiert ein erhaltener Strom.

Betrachten wir als einfachsten Fall die Translationen von Raum und Zeit. Es ist

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu - \delta \eta^\mu \Rightarrow t_a^\mu(x) = -\delta_a^\mu = \text{const}, \\ A'^\mu(x') &= A^\mu(x) \Rightarrow T_a^\mu = 0. \end{aligned} \quad (1.3.86)$$

Verwenden wir also (1.3.83), ergeben die Noetherströme den **kanonischen Energie-Impulstensor**⁶

$$\Theta^{a\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\rho)} \partial^a A^\rho - \mathcal{L} g^{a\nu}. \quad (1.3.87)$$

Da zu $a = 0$ die Zeittranslationen gehören, ist also

$$\Theta^{0\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\rho)} \partial^0 A^\rho - \mathcal{L} \delta^{0\nu} \quad (1.3.88)$$

⁶Wir weichen hier ausnahmsweise von der üblichen Konvention, wonach Vierertensorkomponentenindizes durch griechische Buchstaben bezeichnet werden, um weiterhin die Noetherströme mit a durchzunummerieren, während die Komponenten jedes Noetherstroms mit griechischen Indizes ν bezeichnet werden.

der Viererenergiestromdichtevektor, und analog zur Argumentation im Anschluß an (1.3.4) ist die erhaltene Größe

$$H = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \Theta^{00} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\rho)} \partial^0 A^\rho - \mathcal{L} \right] \quad (1.3.89)$$

die **Energie des elektromagnetischen Feldes** (gemessen in dem gerade betrachteten Inertialsystem). Entsprechend sind die räumlichen Komponenten des **Impulses des elektromagnetischen Feldes**

$$p^i = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \Theta^{i0} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i A^\rho)} \partial^0 A^\rho. \quad (1.3.90)$$

Führen wir nun aber die Ableitungen in (1.3.87) konkret aus, erhalten wir unter Zugrundelegung der eichinvarianten freien Lagrangedichte (1.3.64) den **nicht eichinvarianten Ausdruck**

$$\Theta^{a\nu} = (\partial^a A^\rho) F_\rho{}^\nu + \frac{1}{4} g^{a\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (1.3.91)$$

Es ist also zum einen zu fragen, ob die durch (1.3.89,1.3.90) gegebenen Ausdrücke für Feldenergie und -impuls eichinvariant sind, zum anderen, wie wir eichinvariante und also physikalische Energie- und Impulsdichten formulieren können.

Nun sind die Noetherströme durch die Symmetrietransformation keinesfalls eindeutig bestimmt. Man kann nämlich offenbar immer vermöge

$$j'_a{}^\mu = j_a{}^\mu + \partial_\nu \omega_a{}^{\mu\nu} \quad (1.3.92)$$

einen neuen Noetherstrom definieren, wobei die ω_a beliebige antisymmetrische Tensorfelder bezeichnen. Es ist klar, daß die j'_a dieselben Eigenschaften besitzen wie die j_a : Sie sind wegen der Antisymmetrie der ω_a beide erhalten und definieren dieselben erhaltenen Größen

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \partial_\nu \omega_a{}^{0\nu} = 0, \quad (1.3.93)$$

denn wegen der Antisymmetrie steht unter dem Integral eine reine Dreierdivergenz, und die ω_a müssen freilich wie die j_a hinreichen schnell im Unendlichen abfallen.

Wir suchen nun also einen Tensor

$$T^{a\nu} = \Theta^{a\nu} + \partial_\rho \omega^{a\nu\rho}, \quad (1.3.94)$$

wobei $\omega^{a\nu\rho}$ antisymmetrisch unter Vertauschung der Indizes ν und ρ sein soll, so daß $T^{a\nu}$ eichinvariant ist. Setzen wir

$$\omega^{a\nu\rho} = A^a F^{\nu\rho}, \quad (1.3.95)$$

finden wir schließlich, daß für die **Lösungen der Feldgleichungen** $\partial_\rho F^{\nu\rho} = 0$ gemäß (1.3.68) der Tensor

$$T_{a\nu} = F_a{}^\rho F_{\rho\nu} + \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} g_{a\nu} \quad (1.3.96)$$

all unsere Forderungen erfüllt. Mit Hilfe von (1.3.23) finden wir für die Energiedichte und den Impulsstrom in der Tat die bekannten Ausdrücke des Dreierformalismus

$$\epsilon = T^{00} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2), \quad \vec{S} = \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j T^{0j} = \vec{E} \times \vec{B}, \quad (1.3.97)$$

wobei \vec{S} der aus der klassischen Elektrodynamik bekannte **Poyntingvektor** ist.

In der Tat können wir auch im Dreierformalismus leicht den Energiesatz nachweisen. Leiten wir dazu die Energiedichte nach der Zeit ab:

$$\partial_t \epsilon = \vec{E} \partial_t \vec{E} + \vec{B} \partial_t \vec{B} \quad (1.3.98)$$

und ersetzen die Zeitableitungen der Felder mit Hilfe der freien Maxwellgleichungen (also $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$ in (1.3.1, 1.3.2)):

$$\partial_t \epsilon = \vec{E} \operatorname{rot} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{rot} E. \quad (1.3.99)$$

Nun rechnen wir aber leicht nach, daß

$$\operatorname{div} \vec{S} = \partial_j (\epsilon^{jkl} E^k B^l) = \epsilon^{jkl} [(\partial_j E^k) B^l + E^k \partial_j B^l] = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{B}. \quad (1.3.100)$$

Addieren wir also (1.3.99) und (1.3.100) finden wir also in der Tat die vom Noethertheorem erwartete **lokale Erhaltung der Feldenergie**

$$\partial_t \epsilon + \operatorname{div} \vec{S} = 0. \quad (1.3.101)$$

Dies ist gerade der aus der klassischen Elektrodynamik bekannte **Poyntingsche Satz**.

Wenden wir uns nun den **Lorentztransformationen**, als deren erzeugende Einparametergruppen die **Boosts und Drehungen** gewählt werden können, zu. Wir erwarten also die Herleitung der Drehimpulserhaltung und des Satzes über die Gleichförmigkeit der Schwerpunktsbewegung des freien elektromagnetischen Feldes.

Zunächst ermitteln wir die infinitesimalen Lorentztransformationen:

$$\delta x^\mu = -\frac{1}{2} \delta \eta^{ab} t_{ab}^\mu = \delta \eta^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (1.3.102)$$

wobei das zusätzliche Minuszeichen aus konventionellen Gründen gewählt wurde. Aus dieser entwickeln wir für

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \delta \eta^\mu{}_\nu \quad (1.3.103)$$

die Bedingung (1.1.13) bis zur ersten Ordnung in den $\delta \eta$. Daraus folgt die Antisymmetrie der $\delta \eta$:

$$\delta \eta_{\mu\nu} := g_{\mu\rho} \delta \eta^\rho{}_\nu = -\delta \eta_{\nu\mu}. \quad (1.3.104)$$

Es ergeben sich also insgesamt sechs unabhängige Parameter, entsprechend den infinitesimalen Erzeugern für Boosts und Drehungen. Damit finden wir schließlich

$$t_{ab}^\mu = x_a \delta_b^\mu - x_b \delta_a^\mu. \quad (1.3.105)$$

Das elektromagnetische Potential transformiert sich als Vektorfeld:

$$\delta A^\mu(x) = \frac{1}{2} \delta \eta^{ab} T_{ab}^\mu = \delta \eta^\mu{}_\nu A^\nu, \quad (1.3.106)$$

d.h.

$$T_{ab}^\mu = \delta_a^\mu A_b - \delta_b^\mu A_a. \quad (1.3.107)$$

Damit finden wir für die Noetherströme vermöge (1.3.82) mit dem kanonischen Energie-Impulstensor (1.3.87) für j_{ab}^μ

$$\begin{aligned} \partial_\nu j_{ab}^\nu &= x_a (\partial_\nu \Theta_b^\nu) - x_b (\partial_\nu \Theta_a^\nu) + (\partial^\nu F_{a\nu}) A_b - (\partial^\nu F_{b\nu}) A_a \\ &= \partial_\nu (x_a \Theta_b^\nu - x_b \Theta_a^\nu + F_a^\nu A_b - F_b^\nu A_a). \end{aligned} \quad (1.3.108)$$

Der **kanonische Viererdrehimpulsstromdichtetensor** ist also durch

$$j_{ab}{}^\nu = x_a \Theta_b{}^\nu - \Theta_a{}^\nu x_b - A_a F_b{}^\nu + A_b F_a{}^\nu \quad (1.3.109)$$

gegeben. Wieder erweist sich dieser Ausdruck als nicht eichinvariant. Wir können aber wieder eine beliebige Divergenz hinzufügen, um den eichinvarianten **Viererdrehimpulsstromdichtetensor** zu erhalten, dessen rein räumliche Komponenten auch der naiven Definition einer Drehimpulsdichte führt:

$$J_{ab}{}^\mu = j_{ab}{}^\mu - \partial_\nu \omega_{ab}{}^{\mu\nu} = x_a T_b{}^\nu - x_b T_a{}^\nu, \quad (1.3.110)$$

wobei $T_a{}^\nu$ der symmetrische Energie-Impulstensor (1.3.96) ist. Es gilt

$$\omega_{ab}{}^{\mu\nu} = x_a \omega_b{}^{\mu\nu} - x_b \omega_a{}^{\mu\nu}, \quad (1.3.111)$$

wobei wir uns (1.3.95) bedient haben.

Hinsichtlich der mit den Lorentztransformationen verknüpften Erhaltungsgrößen müssen wir gemäß der allgemeinen Regel nur $J_{ab}{}^0$ über den gesamten Raum integrieren. Die rein räumlichen Komponenten können wir mittels des dreidimensionalen Levi-Civitasymbols umkehrbar eindeutig auf den Drehimpulsdreiervektor

$$\vec{J} = \frac{1}{2} \vec{e}_c \epsilon^{abc} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} J^{ab0} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} (\vec{x} \times \vec{S}) \quad (1.3.112)$$

abbilden, wobei wir die in (1.3.97) angegebene Beziehung zwischen dem Poyntingvektor und dem symmetrischen Energie-Impulstensor verwendet haben. In der Tat erweist sich (1.3.112) als das intuitiv zu erwartende Resultat, wenn man bedenkt, daß \vec{S} die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes darstellt.

Die drei zu den Boosts gehörigen Erhaltungssätze müssen nun dem Schwerpunktssatz der Mechanik entsprechen. In der Tat besagt hier das Noethertheorem

$$\vec{K} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \vec{e}_b J^{0b0} = t \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \vec{S} - \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \vec{x} \epsilon = \text{const.} \quad (1.3.113)$$

Formen wir diese Gleichung noch ein wenig um und dividieren durch die Gesamtfeldenergie

$$\mathcal{E} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \epsilon, \quad (1.3.114)$$

folgt

$$\langle \vec{x} \rangle_\epsilon := \frac{1}{\mathcal{E}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \vec{x} \epsilon = t \frac{\vec{P}}{\mathcal{E}} + \text{const.} \quad (1.3.115)$$

Dabei ist der Gesamtimpuls des Feldes

$$\vec{P} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \vec{S}, \quad (1.3.116)$$

und (1.3.115) besagt, daß sich das mit der Feldenergiedichte gewichtete Mittel des Ortes (analog zum Schwerpunkt in der Mechanik) mit der konstanten Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{\vec{P}}{\mathcal{E}} \quad (1.3.117)$$

bewegt.

1.3.7 Hamiltonsche Formulierung

Wie in der klassischen Punktmechanik können wir auch in der Feldtheorie zur Hamiltonschen Formulierung des Prinzips der kleinsten Wirkung übergehen. Dies wird uns zum einen eine Formulierung der Felddynamik mit Hilfe von Poissonklammern ermöglichen und zum anderen das heuristische Hilfsmittel der „kanonischen Quantisierung“ an die Hand geben.

Wir werden allerdings sogleich sehen, daß uns der Fall des elektromagnetischen Feldes aufgrund der Eichinvarianz Probleme bereitet. Betrachten wir nämlich wieder die Lagrangedichte (1.3.64) des freien elektromagnetischen Feldes, erhalten wir für die **kanonisch konjugierten Feldimpulse**

$$\Pi^\mu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0}, \quad (1.3.118)$$

also $\Pi^0 = 0$. Ein Ausweg ist, die Lagrangedichte durch einen sog. **Eichfixierungsterm** abzuwandeln und zugleich eine Zwangsbedingung einzuführen, die die dazugehörige Eichung definiert. Wir wählen hier die **Lorenz-Eichbedingung** (1.3.32). Wir können dann als Lagrangedichte und Zwangsbedingung

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (1.3.119)$$

setzen. Dann lauten die kanonisch konjugierten Feldimpulse

$$\Pi^0 = -\lambda \partial_\mu A^\mu = -\lambda (\dot{A}^0 + \nabla \vec{A}), \quad \vec{\Pi} = \vec{e}_m F^{m0} = -\dot{\vec{A}} - \nabla A^0. \quad (1.3.120)$$

Hierbei haben wir uns wieder der Dreiervektorschreibweise bedient, da im Hamiltonformalismus die kovariante Schreibweise nicht unbedingt vorteilhaft ist. Die Hamiltondichte wird dann definiert zu

$$\mathcal{H} = \Pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L} = -\frac{1}{2\lambda} (\Pi^0)^2 + \frac{\vec{\Pi}^2}{2} - \Pi^0 \nabla \vec{A} + \vec{\Pi} \nabla A^0 + \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{A})^2. \quad (1.3.121)$$

Die Lorenz-Eichbedingung ist im Hamiltonformalismus einfach durch

$$\Pi^0 = 0 \quad (1.3.122)$$

gegeben. Betrachten wir nun die Wirkung in der Hamiltonschen Form und bilden deren Variation, wobei wir die Π^ρ und A^ρ als unabhängig voneinander zu variierende Größen annehmen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x (\Pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{H}), \\ \delta S &= \int d^4x \left[\delta \Pi^\mu \left(\dot{A}_\mu - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi^\mu} \right) - \delta A^\mu \left(\dot{\Pi}_\mu - \nabla \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla A_\mu)} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A^\mu} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.3.123)$$

Die **Hamiltonschen Kanonischen Gleichungen** nehmen also die Form

$$\begin{aligned} \dot{A}^\mu &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi_\mu}, \\ \dot{\Pi}^\mu &= \nabla \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nabla A_\mu} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_\mu}. \end{aligned} \quad (1.3.124)$$

Führen wir die Ableitungen für die Hamiltondichte (1.3.121) aus, erhalten wir in der Tat die Maxwellgleichungen für den ladungs- und stromfreien Fall (unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (1.3.122)):

$$\begin{aligned}\dot{\Pi}^0 &= \operatorname{div} \vec{\Pi} \stackrel{!}{=} 0, \\ \dot{\vec{\Pi}} &= \nabla(\nabla \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}), \\ \dot{A}^0 &= -\frac{\Pi^0}{\lambda} - \nabla \vec{A} \stackrel{!}{=} -\nabla \vec{A}, \\ \dot{\vec{A}} &= -\vec{\Pi} - \nabla A^0.\end{aligned}\tag{1.3.125}$$

Dies sind in der Tat die Maxwellgleichungen in etwas ungewohnter Schreibweise. In der Tat ergibt die letzte Gleichung

$$\vec{\Pi} = -\dot{\vec{A}} - \nabla A^0 = \vec{E}.\tag{1.3.126}$$

Zusammen mit $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ folgen dann aus der ersten und zweiten Zeile in (1.3.125) die beiden Maxwellgleichungen für verschwindende Ladungs- und Stromdichte:

$$\nabla \times \vec{B} - \dot{\vec{E}} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0.\tag{1.3.127}$$

Die verbliebene Gleichung ergibt wieder die Lorenz-Eichbedingung (1.3.32). Die anderen beiden (homogenen) Maxwellgleichungen sind bereits durch die Darstellung der elektrischen und magnetischen Feldstärke durch die Potentiale A^0 und \vec{A} gesichert. Wie zu erwarten, ergibt also der Hamiltonformalismus dieselben Bewegungsgleichungen wie der Lagrangeformalismus.

Wie wir bereits aus Abschnitt 1.3.3 wissen, besteht auch nach Eichfixierung durch die Lorenzbedingung noch eine restringierte Eichfreiheit: wir können das Viererpotential durch $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi$ mit einem beliebigen χ , das die Wellengleichung $\square \chi = 0$ erfüllt ersetzen, ohne daß sich an den physikalisch beobachtbaren Feldern \vec{E} und \vec{B} etwas ändert und ohne die Lorenzbedingung zu verletzen. Die Feldgleichungen mit Quellen erlauben jedoch nicht die Einführung einer weiteren Eichbedingung, wie wir bereits in Abschnitt 1.3.4 betont haben. Für die Quantisierung einer Theorie, die Wechselwirkungen zwischen dem elektromagnetischen Feld und geladenen Teilchen beschreiben soll, dürfen wir also die Eichung nicht weiter einschränken.

Den Fall des freien elektromagnetischen Feldes haben wir bereits in Abschnitt 1.3.3 behandelt. Selbstverständlich führen nämlich die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen (1.3.125) nach Eliminierung der Π^μ wieder auf die quellenfreien Wellengleichungen (1.3.19) mit $j^\mu = 0$.

1.3.8 Kanonischer Feldformalismus mit Poisson-Klammern

Wir können nun die kanonisch formulierte Feldtheorie des vorigen Abschnitts auch mit Hilfe von Poissonklammern formulieren. Betrachten wir dazu irgendwelche dynamischen Variablen der Form

$$X(t) = \int d^3 \vec{x} \mathcal{X}(\Pi^\mu, A^\mu, \nabla A^\mu).\tag{1.3.128}$$

Deren Variation ist

$$\delta X(t) = \int d^3 \vec{x} \left[\delta \Pi^\mu \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \Pi^\mu} + \delta A^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial A^\mu} - \nabla \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial (\nabla A^\mu)} \right) \right],\tag{1.3.129}$$

wobei wir wieder unter Annahme hinreichend schnellen Verschwindens des Integranden im räumlich Unendlichen partiell integriert haben.

Definieren wir nun Variationsableitungen im Sinne dieses Dreierformalismus als die Koeffizienten von $\delta\Pi^\mu$ und δA^μ , also

$$\frac{\delta_3 X(t)}{\delta\Pi^\mu(t, \vec{x})} := \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \Pi^\mu}, \quad \frac{\delta_3 X(t)}{\delta A^\mu(t, \vec{x})} := \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial A^\mu} - \nabla \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial (\nabla A^\mu)}, \quad (1.3.130)$$

können wir, wieder in enger Analogie zum Fall von endlich vielen Freiheitsgraden, die **Poissonklammer** für zwei dynamische Variablen

$$\{X, Y\}_{\text{pb}} := \int d^3 \vec{x} \left(\frac{\delta_3 X}{\delta A^\mu} \frac{\delta_3 Y}{\delta \Pi_\mu} - \frac{\delta_3 Y}{\delta A^\mu} \frac{\delta_3 X}{\delta \Pi_\mu} \right) \quad (1.3.131)$$

eingeführen. Es ist klar, daß wir auch Poissonklammern lokaler Felder **mit gleichen Zeitargumenten** bilden können, z.B.

$$\begin{aligned} \{A^\mu(t, \vec{x}), A^\nu(t, \vec{y})\}_{\text{pb}} &= 0, \\ \{A^\mu(t, \vec{x}), \Pi^\nu(t, \vec{y})\}_{\text{pb}} &= g^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\Pi^\mu(t, \vec{x}), \Pi^\nu(t, \vec{y})\}_{\text{pb}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.132)$$

Dabei haben wir z.B. folgende formale Ableitungsregel benutzt

$$A^\mu(t, \vec{x}) = \int d^3 \vec{y} A^\mu(t, \vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \Rightarrow \frac{\delta_3 A^\mu(t, \vec{x})}{\delta A^\nu(t, \vec{y})} = \delta_\nu^\mu \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (1.3.133)$$

Die Zeitableitung sowohl von lokalen Feldgrößen als auch Raumintegralen über solche Größen, z.B. X gem. Gl. (1.3.128), ergibt sich dann als Poissonklammer mit der Hamiltonfunktion

$$H(t) = \int d^3 \vec{x} \mathcal{H}(x) \quad (1.3.134)$$

gemäß

$$\frac{dX}{dt} = \{X, H\}_{\text{pb}}. \quad (1.3.135)$$

Ganz analog wie in der klassischen Mechanik (vgl. z.B. [Hee08]) kann man nun kanonische Transformationen behandeln und Symmetrietransformationen betrachten. Wir begnügen uns hier mit der Bemerkung, daß ein erzeugendes Funktional für eine Symmetrietransformation, die nicht explizit von der Zeit abhängt mit dem Hamiltonfunktional vertauscht und umgekehrt jedes mit dem Hamiltonfunktional vertauschende Funktional, eine Symmetrietransformation erzeugt.

1.4 Kanonische Feldquantisierung

In diesem Abschnitt betrachten wir die sogenannte **kanonische Feldquantisierung** für freie Felder. Es ist zu beachten, daß die kanonische Quantisierung lediglich als heuristisches Hilfsmittel angesehen werden kann, um zu einer Quantenfeldtheorie zu gelangen. Aus der nichtrelativistischen Quantentheorie wissen wir, daß die Quantisierung des Schrödingerfeldes zu einer im Fockraum variabler Teilchenzahl

formulierten Vielteilchentheorie führt. Wir erwarten eine entsprechende Interpretationsmöglichkeit freilich auch für die relativistische Theorie. Wir werden die kanonische Quantisierung lediglich für die einfachsten Fälle des skalaren **Klein-Gordon Feldes** und des elektromagnetischen Feldes besprechen. Dabei werden wir bemerken, daß nur die **bosonische Quantisierungsvorschrift** zu einer lokalen und kausalen Quantenfeldtheorie mit positiv semidefiniertem Hamiltonoperator führt. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, wo wir uns vermöge der **Darstellungstheorie der Poincarégruppe** eine formale Technik erarbeiten, alle überhaupt physikalisch sinnvollen Realisierungen lokaler und kausaler relativistischer Quantenfeldtheorien für freie Teilchen mit stabilem Grundzustand zu gewinnen, ist dies ein Spezialfall des allgemeinen **Spin-Statistik-Theorems**, das wir dort auch beweisen werden: Teilchen mit ganzzahligem Spin sind notwendig Bosonen, solche mit halbzahligem Spin Fermionen.

1.4.1 Quantisierung des freien Klein-Gordon Feldes

Wir betrachten der Einfachheit halber zunächst freie skalare Teilchen, die wir durch ein komplexes (sogleich noch zu quantisierendes) Lorentzskalarfeld $\phi(x)$ beschreiben wollen. Die klassische Lagrangedichte sollte ein quadratisches Funktional in ϕ und $\partial_\mu\phi$ sein. Außerdem sollte es ein reeller Lorentzskalar sein. Das ergibt die folgende Form

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi^*)\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi. \quad (1.4.1)$$

Als komplexes Feld beinhaltet ϕ zwei reelle Feldfreiheitsgrade, die im Hamiltonschen Prinzip unabhängig voneinander variiert werden können. Dazu äquivalent ist die unabhängige Variation von ϕ und ϕ^* . Die Variation der Wirkung nach ϕ und ϕ^* liefert die **Euler-Lagrange-Gleichungen**

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} = 0. \quad (1.4.2)$$

Das ergibt die **Klein-Gordon-Gleichungen**

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0, \quad (\square + m^2)\phi^*(x) = 0. \quad (1.4.3)$$

Die Quantisierung erfolgt nun, indem man zunächst zur Hamiltonschen Formulierung der klassischen Theorie übergeht und dann die kanonischen Poissonklammerrelationen zu gleichen Zeiten

$$\{\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})\}_{\text{pb}} = \{\phi^*(t, \vec{x}), \Pi^*(t, \vec{y})\}_{\text{pb}} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (1.4.4)$$

bildet, während die übrigen möglichen Poissonklammerkombinationen von Feldern verschwinden, in Postulate für Kommutatorrelationen für die Feldoperatoren uminterpretiert:

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] &= [\phi^\dagger(t, \vec{x}), \Pi^\dagger(t, \vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \\ [\phi(t, \vec{x}), \Pi^\dagger(t, \vec{y})] &= [\phi(t, \vec{x}), \phi^\dagger(t, \vec{y})] = [\Pi(t, \vec{x}), \Pi^\dagger(t, \vec{y})] = 0, \\ [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] &= [\Pi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = 0. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Die kanonischen Feldimpulse lauten

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger, \quad \Pi^\dagger = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi}. \quad (1.4.6)$$

Die Hamiltondichte ergibt sich aus der 00-Komponente des kanonischen Energie-Impulstensors. Analog wie bei der entsprechenden Herleitung für das elektromagnetische Feld in Abschnitt 1.3.6 finden wir

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}\Pi + \dot{\phi}^\dagger\Pi^\dagger - \mathcal{L} = \Pi^\dagger\Pi + (\nabla\phi^\dagger)(\nabla\phi) + m^2\phi^\dagger\phi, \quad (1.4.7)$$

wobei wir scheinbar zunächst nicht auf Operatorordnungsprobleme stoßen.

Die Bewegungsgleichungen für die Operatoren im **Heisenbergbild der Zeitentwicklung** postulieren wir nun ebenfalls in Analogie zu den klassischen Gleichungen über die Korrespondenz zwischen Poissonklammern und Kommutatoren. Der Hamiltonoperator ist durch

$$\mathbf{H}(t) = \int d^3\vec{x}\mathcal{H}(t, \vec{x}) \quad (1.4.8)$$

gegeben, und die kanonischen Kommutatorregeln (1.4.5) ergeben dann nach einigen einfachen Umformungen die Bewegungsgleichungen für Felder und kanonisch konjugierte Feldimpulse

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x) &= \frac{1}{i} [\phi(x), \mathbf{H}(t)] = \Pi^\dagger(x), \\ \dot{\Pi}(x) &= \frac{1}{i} [\Pi(x), \mathbf{H}(t)] = \Delta_{\vec{x}}\phi^\dagger(x) - m^2\phi^\dagger, \\ \dot{\phi}^\dagger(x) &= \frac{1}{i} [\phi^\dagger(x), \mathbf{H}(t)] = \Pi(x), \\ \dot{\Pi}^\dagger(x) &= \frac{1}{i} [\Pi^\dagger(x), \mathbf{H}(t)] = \Delta_{\vec{x}}\phi(x) - m^2\phi, \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Setzen wir die letzte Gleichung in die Zeitableitung der ersten Gleichung ein, erhalten wir für den Feldoperator die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0. \quad (1.4.10)$$

Diese Gleichung können wir durch einen Fourieransatz lösen. Wir bestimmen dazu zunächst die Feldmoden. Der Ansatz

$$\phi(x) = \mathbf{a}(\vec{p})\exp(-ipx) \quad (1.4.11)$$

ergibt die **Dispersionsrelation**

$$p^2 = m^2, \quad (1.4.12)$$

was uns einen ersten Hinweis für die Teilcheninterpretation liefert, entspricht doch die „**on-shell-Bedingung**“ (1.4.12) gerade der Energie-Impulsbeziehung eines klassischen Teilchens. Allerdings ergibt sich nun scheinbar ein Problem, denn (1.4.12) liefert formal zwei Lösungen für die Energie des Teilchens, nämlich

$$p^0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} =: \pm E_{\vec{p}}. \quad (1.4.13)$$

Andererseits sollten aber Teilchen nur positive Energien besitzen. Gäbe es Teilchen negativer Energie, gäbe es nämlich keinen stabilen Grundzustand, könnte man doch durch Produktion beliebig vieler Teilchen negativer Energie die Gesamtenergie des Systems beliebig klein machen.

Diese Probleme stellen sich auf formaler Ebene einer Einteilchen-Wellenmechanik in Analogie zur Schrödingergleichung in der nichtrelativistischen Quantentheorie entgegen. Auf der Ebene der Feldquantisierung, also der Vielteilchentheorie, läßt sich das Problem allerdings sehr einfach lösen, nämlich

indem man die Mode mit negativem p^0 mit einem Erzeugungsoperator für ein Teilchen positiver Energie multipliziert. Um die Lorentzinvarianz der entstehenden Ausdrücke zu erhalten, denkt man sich zusätzlich dessen Impuls umgekehrt. Definieren wir nun die **Impuls-Feldmoden**

$$u_{\vec{p}}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E(\vec{p})}} \exp[-iE(\vec{p})t + i\vec{p} \cdot \vec{x}], \quad (1.4.14)$$

können wir für die Lösung der operatorwertigen Klein-Gordon-Gleichung (1.4.10)

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} [\mathbf{a}(\vec{p}) u_{\vec{p}}(x) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}) u_{\vec{p}}^*(x)] \quad (1.4.15)$$

schreiben. Zur Wahl der Normierungskonstanten für die Modenfunktionen in (1.4.14) bemerken wir, daß

$$\begin{aligned} u_{\vec{p}}(x) \overleftrightarrow{\partial}_t u_{\vec{q}}(x) &= -\frac{i}{(2\pi)^3 \sqrt{4E(\vec{p})E(\vec{q})}} [E(\vec{p}) - E(\vec{q})] \exp\{-it[E(\vec{p}) + E(\vec{q})] + i\vec{x}(\vec{p} + \vec{q})\}, \\ u_{\vec{p}}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_t u_{\vec{q}}(x) &= -\frac{i}{(2\pi)^3 \sqrt{4E(\vec{p})E(\vec{q})}} [E(\vec{p}) + E(\vec{q})] \exp\{-it[E(\vec{p}) + E(\vec{q})] + i\vec{x}(\vec{p} + \vec{q})\} \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

und folglich

$$i \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} u_{\vec{p}}(x) \overleftrightarrow{\partial}_t u_{\vec{q}}(x) = i \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} u_{\vec{p}}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_t u_{\vec{q}}(x) = 0, \quad i \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} u_{\vec{p}}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_t u_{\vec{q}}(x) = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}). \quad (1.4.17)$$

Daraus folgt wegen (1.4.15)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\vec{q}) &= i \int d^3 \vec{x} u_{\vec{q}}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x), \\ \mathbf{b}(\vec{q}) &= i \int d^3 \vec{x} u_{\vec{q}}(x) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi^\dagger(x). \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

Man beachte insbesondere, daß diese Ausdrücke in der Tat zeitunabhängig sind. Wir finden die Kommutatorrelationen für die \mathbf{a} und \mathbf{b} , indem wir diese vermöge (1.4.18) ausdrücken und die kanonischen Kommutatorrelationen (1.4.5) sowie die Beziehungen (1.4.6) verwenden. Dabei sind die beiden Zeitargumente der Felder gleichzusetzen. Es ergeben sich daraus die Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{a}(\vec{q})] &= [\mathbf{b}(\vec{p}), \mathbf{b}(\vec{q})] = [\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{q})] = 0, \\ [\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{a}^\dagger(\vec{q})] &= [\mathbf{b}(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{q})] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}). \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

Wir können nun den Hamiltonoperator mit Hilfe der \mathbf{a} - und \mathbf{b} -Operatoren berechnen, indem wir die Modenentwicklung (1.4.15) in (1.4.8) mit der Hamiltondichte (1.4.7) einsetzen. Nach einigen elementaren Umformungen ergibt sich

$$\mathbf{H} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} E_{\vec{p}} [\mathbf{a}^\dagger(\vec{p}) \mathbf{a}(\vec{p}) + \mathbf{b}(\vec{p}) \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})]. \quad (1.4.20)$$

Betrachten wir nun einen beliebigen Energieeigenzustand $|E\rangle$ und den Zustand $\mathbf{a}(\vec{p})|E\rangle$. Daraus ergibt sich mit Hilfe der Vertauschungsrelationen (1.4.19)

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}, \mathbf{a}(\vec{p})] &= -E_{\vec{p}} \mathbf{a}(\vec{p}), & [\mathbf{H}, \mathbf{b}(\vec{p})] &= -E_{\vec{p}} \mathbf{b}(\vec{p}), \\ [\mathbf{H}, \mathbf{a}^\dagger(\vec{p})] &= E_{\vec{p}} \mathbf{a}^\dagger(\vec{p}), & [\mathbf{H}, \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})] &= E_{\vec{p}} \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}). \end{aligned} \quad (1.4.21)$$

Für einen beliebigen Energieeigenvektor $|E\rangle$ des Systems folgt also z.B.

$$\mathbf{H}\mathbf{a}(\vec{p})|E\rangle = \{[\mathbf{H}, \mathbf{a}(\vec{p})] + \mathbf{a}(\vec{p})\mathbf{H}\}|E\rangle = (E - E_{\vec{p}})\mathbf{a}(\vec{p})|E\rangle, \quad (1.4.22)$$

d.h. $\mathbf{a}(\vec{p})|E\rangle$ ist entweder Eigenvektor zum Eigenwert $E - E_{\vec{p}}$ oder der Nullvektor. Entsprechendes folgt für $\mathbf{b}(\vec{p})|E\rangle$.

Wir **postulieren** nun, daß \mathbf{H} nach unten beschränkt ist, also die Existenz eines Energieeigenzustandes minimaler Energie existiert, den wir mit $|\Omega\rangle$ bezeichnen wollen. Da $E_{\vec{p}} = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} > m \geq 0$ muß

$$\mathbf{a}(\vec{p})|\Omega\rangle = \mathbf{b}(\vec{p})|\Omega\rangle = 0 \quad (1.4.23)$$

sein, weil andernfalls die Vektoren Eigenvektoren zum um $E_{\vec{p}}$ niedrigeren Energieeigenwert wären.

Es ergibt sich nun jedoch ein Problem mit der Grundzustandsenergie, denn es ist

$$\begin{aligned} E_\Omega &= \langle \Omega | \mathbf{H} | \Omega \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} E_{\vec{p}} \langle \Omega | \mathbf{a}^\dagger(\vec{p})\mathbf{a}(\vec{p}) + \mathbf{b}(\vec{p})\mathbf{b}^\dagger(\vec{p}) | \Omega \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} E_{\vec{p}} \langle \Omega | \mathbf{b}(\vec{p})\mathbf{b}^\dagger(\vec{p}) | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

Nun ist wegen (1.4.19) und (1.4.23)

$$\langle \Omega | \mathbf{b}(\vec{p})\mathbf{b}^\dagger(\vec{q}) | \Omega \rangle = \langle \Omega | [\mathbf{b}(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{q})] | \Omega \rangle = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}). \quad (1.4.25)$$

Der Ausdruck in (1.4.24) ist also nicht wohldefiniert. Andererseits ist wegen (1.4.19)

$$\mathbf{b}(\vec{p})\mathbf{b}^\dagger(\vec{q}) = \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{q})\mathbf{b}(\vec{p}), \quad (1.4.26)$$

d.h. man darf erwarten, daß der Operator

$$\mathbf{H}' = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} E_{\vec{p}} [\mathbf{a}^\dagger(\vec{p})\mathbf{a}(\vec{p}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})\mathbf{b}(\vec{p})] \quad (1.4.27)$$

sich von \mathbf{H} nur um einen Ausdruck $\propto 1$ unterscheidet und daher dieselben Kommutatoreigenschaften mit den Feldoperatoren wie \mathbf{H} (1.4.9) ergibt. Dies läßt sich in der Tat mit Hilfe der Modenentwicklung nachrechnen. Physikalisch sind unter Absehung der Gravitation ohnehin nur Energiedifferenzen meßbar. Wir haben es hier mit einem ersten Beispiel einer **Renormierung** zu tun, nämlich der Renormierung der Grundzustandsenergie. Es ist nämlich

$$E'_\Omega = \langle \Omega | \mathbf{H}' | \Omega \rangle = 0, \quad (1.4.28)$$

und es erscheint natürlich, die Grundzustandsenergie 0 zu setzen. Im folgenden lassen wir den Strich bei \mathbf{H}' wieder weg und definieren \mathbf{H} durch (1.4.27).

Da weiter solche Operatorordnungsprobleme noch öfter auftreten werden, führt man die **Normalordnung** von Produkten von Feldoperatoren ein: Bei einer Modenentwicklung eines Feldoperatorprodukts werden einfach alle Erzeugungsoperatoren ganz nach links und alle Vernichtungsoperatoren ganz nach rechts gebracht. Dies wird dadurch notiert, daß man den fraglichen Ausdruck in Doppelpunkte einschließt. Damit können wir unseren umdefinierten Hamiltonoperator mit Hilfe der Feldoperatoren in der Form

$$\mathbf{H} = \int d^3 \vec{x} : \mathcal{H}(x) : \quad (1.4.29)$$

schreiben, wobei der Energiedichteoperator \mathcal{H} durch (1.4.7) definiert ist.

In Analogie zum harmonischen Oszillator ist dann klar, daß der gesamte Hilbertraum unseres durch die Feldoperatoren beschriebenen quantenmechanischen Systems durch die verallgemeinerten Energieeigenvektoren

$$\left| (a, \vec{p}_1), \dots, (a, \vec{p}_n); (b, \vec{p}'_1), \dots, (b, \vec{p}'_{n'}) \right\rangle = \prod_{j=1}^n \mathbf{a}^\dagger(\vec{p}_j) \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}'_{j'}) |\Omega\rangle \quad (1.4.30)$$

beschreiben lassen. Diese Vektoren sind simultane Eigenvektoren der hermiteschen Operatoren

$$\mathbf{n}_a(\vec{p}) = \mathbf{a}^\dagger(\vec{p}) \mathbf{a}(\vec{p}), \quad \mathbf{n}_b(\vec{p}) = \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}) \mathbf{b}(\vec{p}), \quad (1.4.31)$$

und wir können den Hamiltonoperator gemäß (1.4.27) in der Form

$$\mathbf{H} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} E_{\vec{p}} [\mathbf{n}_a(\vec{p}) + \mathbf{n}_b(\vec{p})] \quad (1.4.32)$$

schreiben. Dies suggeriert, daß wir die $\mathbf{n}_a(\vec{p})$ und $\mathbf{n}_b(\vec{p})$ als Teilchenzahlimpulsdichteoperatoren auffassen können. Dann sind $\mathbf{a}(\vec{p})$ und $\mathbf{b}(\vec{p})$ Vernichtungsoperatoren für Teilchen der Sorten a und b und entsprechend deren Adjungierten die dazugehörigen Erzeugungsoperatoren. Entsprechend folgt aus den Kommutatorregeln (1.4.19), daß die Einteilchenvektoren die Normierung

$$\langle a, \vec{p} | a, \vec{p}' \rangle = \langle b, \vec{p} | b, \vec{p}' \rangle = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (1.4.33)$$

besitzen.

Wir werden im folgenden sehen, daß diese Annahme gerechtfertigt ist, indem wir zeigen, daß sie konsistent mit den übrigen additiven Erhaltungsgrößen wie Impuls und Drehimpuls ist. Wir werden auch zeigen, daß wir notwendig die Feldmoden mit sowohl positiven als auch negativen Frequenzen in der Modenentwicklung (1.4.15) berücksichtigen müssen, wenn wir verlangen, daß die Poincarégruppe auf die Feldoperatoren in derselben Weise wirkt wie auf klassische Felder, d.h. daß die Feldoperatoren sich im Sinne lokaler Felder transformieren. Zur Ausführung dieses Programms müssen wir zunächst den Lagrangedichteoperator im Sinne des Noethertheorems analysieren, um Feldoperatorausdrücke für die Liealgebra der Poincarégruppe, also für den Gesamtimpuls $\vec{\mathbf{P}}$ als Generatoren für die räumlichen Translationen, den Gesamtdrehimpuls $\vec{\mathbf{J}}$ als Generatoren für die Drehungen und die Schwerpunktsoperatoren $\vec{\mathbf{K}}$ als Generatoren für die Boosts, zu erhalten.

Beginnen wir also mit den Translationen. In der Notation von Abschnitt 1.3.6 lautet das Transformationsgesetz

$$x' = x - \delta a, \quad \phi'(x') = \phi(x) = \phi(x' + \delta a) \quad (1.4.34)$$

und für ϕ^\dagger entsprechend d.h. in der Form (1.3.74) geschrieben

$$t_a^\mu = \delta_a^\mu, \quad T_a = 0. \quad (1.4.35)$$

Daraus ergibt sich für den kanonischen Energie-Impulstensor-Operator der Ansatz

$$\Theta^{\alpha\mu} =: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \partial^\alpha \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi^\dagger} \partial^\alpha \phi^\dagger - \mathcal{L} g^{\alpha\mu} :, \quad (1.4.36)$$

wobei wir statt a jetzt entsprechend unserer Konvention für Lorentzindezes α schreiben. Die Operatoren für die Impulsdichten sind demnach durch

$$:\mathcal{P}^\alpha := \Theta^{\alpha 0} :=: \left(\begin{array}{c} \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} - \dot{\phi}^\dagger \ddot{\phi} \\ -\dot{\phi}^\dagger \vec{\nabla}_{\vec{x}} \phi - (\vec{\nabla}_{\vec{x}} \phi^\dagger) \dot{\phi} \end{array} \right) : \quad (1.4.37)$$

gegeben. Dabei haben wir für die Energiedichte im räumlichen Integral für die Energie partiell integriert und von der Klein-Gordongleichung (1.4.10) Gebrauch gemacht. Setzen wir in diesen Ausdruck die Modenentwicklung (1.4.15) ein, finden wir nach einigen elementaren Umformungen

$$\mathbf{P}^\mu = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} p^\mu [\mathbf{n}_a(\vec{p}) + \mathbf{n}_b(\vec{p})]_{p^0=E_{\vec{p}}}, \quad (1.4.38)$$

wobei wir die Impulsdichteoperatoren für a - und b -Teilchen (1.4.31) verwendet haben. Insbesondere gilt $\mathbf{P}^0 = \mathbf{H}$, wie es sein muß. Wir müssen nun noch überprüfen, ob diese Operatoren tatsächlich Raumzeittranslationen generieren, d.h. es sollte gelten

$$\phi'(x) = \exp(i\mathbf{P} \cdot a) \phi(x) \exp(-i\mathbf{P} \cdot a) = \phi(x + a). \quad (1.4.39)$$

Betrachten wir dazu infinitesimale Translationen um δa , dann lautet die vorige Gleichung bis zur ersten Ordnung in δa :

$$-i\delta a^\mu [\phi(x), \mathbf{P}_\mu] = \delta a^\mu \partial_\mu \phi(x). \quad (1.4.40)$$

Da dies für alle δa^μ zutrifft, bedeutet dies, daß die Kommutatorrelation

$$[\phi(x), \mathbf{P}_\mu] = i\partial_\mu \phi(x) \quad (1.4.41)$$

gelten muß. Für $\mathbf{P}_0 = \mathbf{H}$ haben wir dies oben bei der Herleitung der kanonischen Bewegungsgleichungen schon gezeigt. Wir können dies aber auch mit der (1.4.38) durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausgedrückten Gestalt für \mathbf{P}_μ nachweisen. Dazu benötigen wir zunächst die Kommutatoren der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren mit dem Feldoperator. Setzen wir die Modenentwicklung (1.4.15) ein, finden wir mit Hilfe der Kommutatorrelationen (1.4.19) nach einfacher Rechnung

$$\begin{aligned} [\phi(x), \mathbf{a}(p)] &= [\phi(x), \mathbf{b}^\dagger(p)] = 0, \\ [\phi(x), \mathbf{a}^\dagger(p)] &= \exp(-ipx)|_{p^0=E_{\vec{p}}}, \\ [\phi(x), \mathbf{b}(p)] &= -\exp(ipx)|_{p^0=E_{\vec{p}}}. \end{aligned} \quad (1.4.42)$$

Daraus folgt für die Kommutatoren mit den Impulsraumdichteoperatoren (1.4.31)

$$\begin{aligned} [\phi(x), \mathbf{n}_a(\vec{p})] &= \mathbf{a}(\vec{p}) \exp(-ipx)|_{p^0=E_{\vec{p}}}, \\ [\phi(x), \mathbf{n}_b(\vec{p})] &= -\mathbf{b}^\dagger(\vec{p}) \exp(-ipx)|_{p^0=E_{\vec{p}}} \end{aligned} \quad (1.4.43)$$

und daraus schließlich durch Einsetzen von (1.4.38) die Beziehung (1.4.41), d.h. \mathbf{P}_μ erzeugt tatsächlich raumzeitliche Translationen.

Wenden wir uns nun den Lorentztransformationen zu. Für Skalarfelder gilt

$$\phi'(x') = \phi(x), \quad x'^\mu = x^\mu + \delta\omega^\mu{}_\beta x^\beta = x^\mu - \frac{1}{2}\delta\omega^{\alpha\beta} t_{\alpha\beta}^\mu \quad (1.4.44)$$

mit

$$t_{\alpha\beta}^\mu = x_\alpha \delta_\beta^\mu - x_\beta \delta_\alpha^\mu. \quad (1.4.45)$$

Gemäß (1.3.82) erhalten wir unter Verwendung der Symmetrie des kanonischen Energie-Impulstensors (1.4.36) für die sechs Generatoren der Lorentzgruppe die Ausdrücke

$$\mathbf{J}_{\alpha\beta} = \int d^3\vec{x} : x_\alpha \mathcal{P}_\beta - x_\beta \mathcal{P}_\alpha :, \quad (1.4.46)$$

wobei wir wieder die Normalordnung vorgenommen haben und die Viererimpulsdichten (1.4.37) eingeführt haben.

Nun erweist es sich als bequemer, zur Analyse der Lorentzgruppe den manifest kovarianten Formalismus zu verlassen und die Erzeuger für Drehungen in Gestalt von Dreivektor-Drehimpulsoperatoren $\vec{\mathbf{J}}$ und die Boosts durch Dreivektoren $\vec{\mathbf{K}}$ auszudrücken. Sie sind durch die rein räumlichen bzw. die zeit-räumlichen Komponenten von $\mathbf{J}_{\alpha\beta}$ wie folgt definiert, wobei wir uns zunutze machen, daß sie zeitlich konstant sind und daher bei $t = 0$ ausgewertet werden dürfen:

$$\vec{\mathbf{J}} = \int d^3\vec{x} : \vec{x} \times \vec{\mathcal{P}} :, \quad (1.4.47)$$

$$\vec{\mathbf{K}} = \int d^3\vec{x} : (t\vec{\mathcal{P}} - \vec{x}\mathcal{P}^0) := t\vec{\mathbf{P}} - \int d^3\vec{x} : \vec{x}\mathcal{P}^0 :. \quad (1.4.48)$$

Die Berechnung der Generatoren in ihrer expliziten Form durch Erzeuger und Vernichter ist etwas komplizierter als im Falle des Impulses, muß man doch die \vec{x} zunächst mit Hilfe von Ableitungen der Modenfunktionen nach \vec{p} ausdrücken. Es ergeben sich nach einiger Algebra aber die folgenden Relationen

$$\begin{aligned} i \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \vec{x} u_{\vec{q}}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_t u_{\vec{p}}(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} u_{\vec{q}}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_t \vec{\nabla}_{\vec{p}} u_{\vec{p}}(x) + \frac{\vec{p}t}{E} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \\ i \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \vec{x} u_{\vec{q}}(x) \overleftrightarrow{\partial}_t u_{\vec{p}}(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} u_{\vec{q}}(x) \overleftrightarrow{\partial}_t \vec{\nabla}_{\vec{p}} u_{\vec{p}}(x) + i \frac{\vec{p}}{2E^2(\vec{p})} \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}). \end{aligned} \quad (1.4.49)$$

Setzt man nun in (1.4.47) die Modenentwicklung für die Felder ein, canceln sich aufgrund von $\vec{p} \times \vec{q}$ die Zusatzterme $\propto \delta^{(3)}(\vec{p} \pm \vec{q})$ auf der rechten Seite von (1.4.49) wegen $\vec{p} \times \vec{q} = \pm \vec{p} \times \vec{p} = 0$ weg, so daß man schließlich

$$\vec{\mathbf{J}} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \left[\mathbf{a}^\dagger(\vec{p}) i \vec{\nabla}_{\vec{p}} \mathbf{a}(\vec{p}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}) i \vec{\nabla}_{\vec{p}} \mathbf{b}(\vec{p}) \right] \times \vec{p} \quad (1.4.50)$$

erhält. Auf ähnliche Weise zeigt man

$$\vec{\mathbf{K}} = t\vec{\mathbf{P}} - \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \left[\mathbf{a}^\dagger(\vec{p}) i \vec{\nabla}_{\vec{p}} \mathbf{a}(\vec{p}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}) i \vec{\nabla}_{\vec{p}} \mathbf{b}(\vec{p}) \right] E_{\vec{p}}. \quad (1.4.51)$$

Freilich haben wir nun nachzuweisen, daß diese Operatoren tatsächlich Drehungen und Boosts erzeugen. Dazu parametrisieren wir die infinitesimalen Lorentztransformationen (1.3.103) mit zwei Dreiervektoren $\delta\vec{\eta}$ und $\delta\vec{\varphi}$ vermöge

$$(\delta\omega^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\eta_1 & -\delta\eta_2 & -\delta\eta_3 \\ -\delta\eta_1 & 0 & \delta\varphi_3 & -\delta\varphi_2 \\ -\delta\eta_2 & -\delta\varphi_3 & 0 & \delta\varphi_1 \\ -\delta\eta_3 & \delta\varphi_2 & -\delta\varphi_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4.52)$$

Die infinitesimale Lorentztransformation, angewandt auf das Klein-Gordon-Feld lautet dann in der hier benötigten Form

$$\phi'(x) = \phi(x) + \delta\vec{\eta} \cdot (t\vec{\nabla}_{\vec{x}}\phi + \vec{x}\dot{\phi}) + \delta\vec{\varphi} \cdot (\vec{x} \times \vec{\nabla}_{\vec{x}})\phi(x). \quad (1.4.53)$$

Die unitären Operatoren für endliche Lorentztransformation sind durch

$$\mathbf{U}(\vec{\eta}, \vec{\varphi}) = \exp(-i\vec{\eta} \cdot \vec{\mathbf{K}} - i\vec{\varphi} \cdot \vec{\mathbf{J}}) \quad (1.4.54)$$

gegeben. Es zeigt sich in der Tat mit Hilfe der Vertauschungsrelationen (1.4.42), daß in der Tat für infinitesimale Transformationen

$$i \left[\phi(x), \delta\vec{\eta} \cdot \vec{\mathbf{K}} + \delta\vec{\varphi} \cdot \vec{\mathbf{J}} \right] = \delta\vec{\eta} (t\vec{\nabla}_{\vec{x}}\phi + \vec{x}\dot{\phi}) + \delta\vec{\varphi} (\vec{x} \times \vec{\nabla}_{\vec{x}})\phi(x) \quad (1.4.55)$$

in Übereinstimmung mit (1.4.53) gilt.

Damit haben wir am Beispiel des freien skalaren Klein-Gordonfeldes gezeigt, wie eine Quantenfeldtheorie mit Feldoperatoren, die sich unter eigentlich orthochronen Poincaré-Transformationen wie ihre klassischen Analoga lokal transformieren, wobei die Transformationen durch unitäre Operatoren realisiert sind, wie es für Symmetrietransformationen sein muß, konstruiert werden kann. Weiter haben wir die Theorie so aufgebaut, daß der Hamiltonoperator positiv semidefinit ist, also das Energiespektrum nach unten beschränkt ist.

Schließlich betrachten wir noch die Symmetrie der Lagrangedichte (und damit auch der Wirkung) unter **Phasenänderungen**. Offenbar ändert sich nämlich die Lagrangedichte nicht, wenn wir die Phase des Klein-Gordon-Feldes umdefinieren, also neue Felder

$$\phi'(x) = \exp(i\alpha)\phi(x), \quad \phi'^{\dagger}(x) = \exp(-i\alpha)\phi^{\dagger}(x) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.4.56)$$

einführen. In der Schreibweise für das allgemeine Noether-Theorem (1.3.74) lautet die entsprechende infinitesimale Transformation

$$\delta x^\mu = 0, \quad \delta\phi = i\delta\alpha\phi, \quad \delta\phi^{\dagger} = -i\delta\alpha\phi^{\dagger}, \quad (1.4.57)$$

d.h. es gilt

$$t(x) = 0, \quad \mathbf{T} = i\phi, \quad \mathbf{T}^{\dagger} = -i\phi^{\dagger}. \quad (1.4.58)$$

Um den zu dieser Symmetrie gehörigen Noether-Strom zu finden, verwenden wir (1.3.82), wobei wir hier ϕ und ϕ^{\dagger} als voneinander unabhängige Feldfreiheitsgrade aufzufassen haben. Zunächst gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \mathbf{T} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{\dagger}} \mathbf{T}^{\dagger} = i\phi^{\dagger}\phi - i\phi\phi^{\dagger} = 0, \quad (1.4.59)$$

wobei wir die kanonischen Vertauschungsrelationen (1.4.5) verwendet haben. Weiter gilt (bis auf singuläre Ausdrücke, die proportional zum Einheitsoperator sind)

$$-\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \mathbf{T} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^\dagger)} \mathbf{T}^\dagger = -i(\square \phi^\dagger) \phi + i(\square \phi) \phi^\dagger = \partial_\nu \left(i \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\nu \phi \right). \quad (1.4.60)$$

Damit ist der **Strom**

$$\mathbf{j}^\mu = i \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \quad (1.4.61)$$

für die Lösungen der Feldgleichungen (also der Klein-Gordon-Gleichung) erhalten. Das rechnet man auch sofort nach, denn offenbar gilt wegen (1.4.10)

$$\partial_\mu \mathbf{j}^\mu = i \phi^\dagger \overleftrightarrow{\square} \phi = im^2(\phi^\dagger \phi - \phi^\dagger \phi) = 0. \quad (1.4.62)$$

Setzen wir in die dazugehörige **Noether-Ladung** die Modenentwicklung (1.4.15) ein und beachten zugleich die Normalordnung, erhalten wir

$$\mathbf{Q} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} : \mathbf{j}^0(t, \vec{x}) := \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} [\mathbf{n}_a(\vec{p}) - \mathbf{n}_b(\vec{p})]. \quad (1.4.63)$$

Wir haben also aus der Quantisierung des komplexen Klein-Gordon-Feldes eine Teilcheninterpretation erreicht, die zwei Sorten Teilchen beschreibt, die beide die gleiche Masse besitzen und auch sonst in allen Eigenschaften gleich sind. Insbesondere gilt für beide die Energie-Impulsbeziehung $E_{\vec{p}} = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$. Der einzige Unterschied ist, daß die mit a bezeichneten Teilchen eine positive und die mit b bezeichneten eine negative Ladungseinheit tragen. Man bezeichnet solche Paare von Teilchensorten als **Teilchen und Antiteilchen**. Wir bemerken noch, daß wir die positive Definitheit der Energie und das entgegengesetzte Ladungsvorzeichen im Zuge der zur Renormierung der entsprechenden Größen benötigten Normalordnung nur durch die Quantisierung des skalaren Klein-Gordon-Feldes als **Bosonen** erreichen konnten. Hätten wir statt der kanonischen gleichzeitigen Kommutatorregeln (1.4.5), die Bosonen charakterisieren, fermionische Antikommutatorregeln angesetzt, hätten wir umgekehrt positive Energien für die Teilchen (Sorte a) negative Energien für die Antiteilchen (Sorte b) und positive Ladung für Teilchen und Antiteilchen erhalten. Diese Variante widerspricht allerdings der Stabilität des Systems, da dann kein Grundzustand niedrigster Energie existieren würde. Diese Beobachtung ist ein Beispiel für das allgemein gültige **Spin-Statistik-Theorem**, das wir im nächsten Abschnitt bei der Analyse der Darstellungen der Poincaré-Gruppe genauer betrachten werden. Demnach erfordert im Rahmen einer lokalen Quantenfeldtheorie die **Mikrokausalität**, also die Vertauschbarkeit lokaler Observablen bei raumartigen Abständen, und die positive Semidefinitheit des Hamiltonoperators zwingend die Quantisierung von **Feldern mit ganzzahligem Spin als Bosonen** und diejenige von **Feldern mit halbzahligem Spin als Fermionen**.

1.4.2 Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes

Wir versuchen nun, die eben durchgeführten Betrachtungen am Klein-Gordonfeld auf das freie elektromagnetische Feld zu übertragen. Wir könnten die klassische Theorie in Abschnitt 1.3 einfach mit Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren für die physikalischen transversalen Feldmoden gemäß der Fourier-Darstellung (1.3.45) quantisieren. Diese Methode hat den Vorteil, daß von vornherein in den Formalismus nur die **physikalischen transversalen Feldmoden** eingehen. Es zeigt sich aber, daß dies bei der Anwendung auf die wechselwirkende Theorie zu recht unangenehmen Feynman-Regeln führt

und man mit nicht manifest kovarianten Größen arbeiten muß, so daß die Lorentz-Invarianz der Theorie nicht explizit gegeben ist.

Andererseits können wir aber auch versuchen, mit dem Viererpotential zu arbeiten. Hierbei ergibt sich nun ein Problem aus der **Eichinvarianz** der Elektrodynamik. Im folgenden wollen wir den manifest kovarianten **Gupta-Bleuler-Operatorformalismus** [Gup50, Ble50] besprechen, der mit einem **Fock-Raum mit indefinitem Skalarprodukt** arbeitet und den Hilbert-Raum der physikalischen Zustände mit positiv definitem Skalarprodukt durch Nebenbedingungen aussondert. Sämtliche Erwartungswerte physikalischer Observablen sind dann bzgl. solcher physikalischer Zustände zu nehmen, und wir müssen zeigen, daß die unphysikalischen Feldmoden und Zustände nicht zu physikalischen Aussagen beitragen.

Gehen wir nämlich zunächst von der klassischen Lagrange-Dichte (1.3.64) aus, verschwindet wegen (1.3.118) der kanonische Feldimpuls zu A_0 identisch. Gehen wir andererseits von der eichfixierten Gl. (1.3.119) aus, ergibt sich beim Übergang von klassischen Feldern ein Widerspruch zwischen den kanonischen Kommutatorrelationen zu gleichen Zeiten. Den Ausweg daraus haben Gupta und Bleuler [Gup50, Ble50] gewiesen. Die Idee besteht darin, zunächst alle vier Komponenten des elektromagnetischen Potentials beizubehalten und zu quantisieren. Dabei gehen wir von der Lagrange-Dichte (1.3.119) aus, lassen jedoch die Lorenz-Eichbedingung zunächst ausser acht, d.h. wir setzen

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (1.4.64)$$

Die kanonisch konjugierten Feldimpulse sind dann

$$(\Pi^\mu) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} \right) = - \left(\frac{\lambda \partial_\mu A^\mu}{\dot{A} + \vec{\nabla} A^0} \right). \quad (1.4.65)$$

Solange wir $\lambda \neq 0$ wählen, können wir also, solange wir die Lorenz-Bedingung nicht voraussetzen, die kanonischen Kommutatorrelationen zu gleichen Zeiten

$$[\Pi^\mu(t, \vec{x}), \Pi_\nu(t, \vec{x}')] = [\mathbf{A}^\mu(t, \vec{x}), \mathbf{A}_\nu(t, \vec{x}')] = 0, \quad [\mathbf{A}^\mu(t, \vec{x}), \Pi_\nu(t, \vec{x}')] = i\delta_\nu^\mu \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.4.66)$$

ansetzen, ohne in vordergründige Widersprüche zu geraten. Da die klassischen Maxwellfeldkomponenten reell sind, nehmen wir an, daß die \mathbf{A}^μ (und damit auch die Π^μ) selbstadjungierte Operatoren sind. Aus den ersten beiden Regeln folgt, daß die rein räumlichen Ableitungen der Potentiale zu gleichen Zeiten ebenfalls sämtlich kommutieren. Foglich kommutieren auch je zwei Zeitableitungen. Die einzigen nichtverschwindenden gleichzeitigen Kommutatoren zwischen den Potentialen und ihren Zeitableitungen sind also

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}^\mu(t, \vec{x}), \dot{\mathbf{A}}_0(t, \vec{x}')] &= -\frac{i}{\lambda} \delta_0^\mu \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [\mathbf{A}^\mu(t, \vec{x}), \dot{\mathbf{A}}_j(t, \vec{x}')] &= -i\delta_j^\mu \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned} \quad (1.4.67)$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus dem Hamiltonschen Prinzip zu

$$\square \mathbf{A}^\nu - (1 - \lambda) \partial^\nu \partial_\mu \mathbf{A}^\mu = 0. \quad (1.4.68)$$

Überschieben mit ∂_ν liefert

$$\lambda \square \partial_\nu \mathbf{A}^\nu = 0. \quad (1.4.69)$$

Für $\lambda \neq 0$ erfüllt also $\partial_\mu \mathbf{A}^\mu$ die Wellengleichung. Daraus folgern wir, daß in der Fourier-Entwicklung nur Moden mit $k^2 = 0$ vorkommen. Ohne die Lorenz-Eichbedingung haben wir aber vier unabhängige Feldfreiheitsgrade, und die Entwicklung nach Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren lautet entsprechend

$$\mathbf{A}^\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) \left[\mathbf{a}^\lambda(\vec{k}) u_{\vec{k}}^\mu(x) + \mathbf{a}^{\lambda\dagger}(\vec{k}) u_{\vec{k}}^{*\mu}(x) \right]. \quad (1.4.70)$$

Dabei verwenden wir wieder die Modenfunktionen (1.4.14) mit $m = 0$. Weiter wählen wir die $\epsilon_{1,2}^\mu$ als

$$(\epsilon_{1,2}^\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\epsilon}_{1,2}(\vec{k}) \end{pmatrix} \quad (1.4.71)$$

mit den durch (1.3.38-1.3.41) definierten Polarisationsvektoren der Strahlungseichung des klassischen Feldes. Weiter sei

$$(\epsilon_3^\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{z} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad (1.4.72)$$

und schließlich

$$(\epsilon_0^\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4.73)$$

Offenbar gilt

$$g_{\mu\nu} \epsilon_\lambda^\mu \epsilon_{\lambda'}^\nu = g_{\lambda\lambda'} \quad \text{und} \quad g^{\lambda\lambda'} \epsilon_\lambda^\mu \epsilon_{\lambda'}^\nu = g^{\mu\nu}. \quad (1.4.74)$$

In dieser Konvention liegt es nahe, anzunehmen, daß die $\mathbf{a}^{1,2}$ Vernichtungsoperatoren für **physikalische transversale Photonen** bezeichnen, während \mathbf{a}^0 **unphysikalische zeitartige** und \mathbf{a}^3 **unphysikalische raumartige Photonen** vernichten. In der Tat zeigt man in analoger Weise wie bei den skalaren Bosonen (Klein-Gordon-Feldern) die Kommutatorrelationen

$$\left[\mathbf{a}^\lambda(\vec{k}), \mathbf{a}^{\lambda'\dagger}(\vec{k}') \right] = -g^{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (1.4.75)$$

Alle anderen Kommutatoren, die aus den \mathbf{a}^λ gebildet werden können, verschwinden. Dabei stellen wir allerdings fest, daß die zeitartigen Photonen ein „falsches Vorzeichen“ aufweisen. Man könnte daher versucht sein, $\mathbf{a}^{0\dagger}$ als Vernichtungs- und \mathbf{a}^0 als Erzeugungsoperator zu interpretieren, aber dies führt zu einem Widerspruch mit der Zeitabhängigkeit in der Modenentwicklung (1.4.70). Entsprechend haben wir also auch für die zeitartigen Photonen wie üblich die \mathbf{a}^0 als Vernichtungsoperatoren zu interpretieren. Damit definieren wir den **Vakuumzustand** durch

$$\mathbf{a}^\lambda(\vec{k}) |\Omega\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad \vec{k} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.4.76)$$

Berechnen wir nun das Skalarprodukt von Einphotonenzuständen $|\vec{k}, \lambda\rangle = \mathbf{a}_\lambda^\dagger |\Omega\rangle$ mit definierter Polarisation $\lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$, erhalten wir aus (1.4.75) und (1.4.76)

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}, \lambda | \vec{k}', \lambda' \rangle &= \langle \Omega | \mathbf{a}^\lambda(\vec{k}) \mathbf{a}^{\lambda'\dagger}(\vec{k}') | \Omega \rangle = \langle \Omega | \left[\mathbf{a}^\lambda(\vec{k}), \mathbf{a}^{\lambda'\dagger}(\vec{k}') \right] | \Omega \rangle \\ &= -g^{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \end{aligned} \quad (1.4.77)$$

Dies bedeutet aber, daß der so konstruierte Fock-Raum mit der Sesquilinearform $\langle \cdot | \cdot \rangle$ **nicht positiv definit** ist. Bildet man nämlich ein Wellenpaket für ein zeitartiges Photon

$$|\psi, \lambda = 0\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} |\vec{k}, \lambda\rangle \psi(\vec{k}) \quad \text{mit} \quad \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} |\psi(\vec{k})|^2 = 1, \quad (1.4.78)$$

erhalten wir mit Hilfe von (1.4.77)

$$\langle \psi, \lambda = 0 | \psi, \lambda = 0 \rangle = -1 < 0. \quad (1.4.79)$$

Nun wissen wir aber schon, daß zeitartige Photonen nicht physikalisch sind, d.h. wir müssen uns nun damit beschäftigen, wie wir die **Lorenz-Eichbedingung** in dem Formalismus berücksichtigen können. Der Ansatz von Gupta und Bleuler ist nun, **physikalische Mehrphotonenzustände** dadurch zu charakterisieren, daß

$$\partial^\mu \mathbf{A}_\mu^{(+)}(x) \Big| \Psi_{\text{phys}} \rangle = 0 \quad (1.4.80)$$

ist. Dabei ist $\mathbf{A}_\mu^{(+)}$ der Anteil des Feldoperators mit positiven Frequenzen, d.h.

$$\mathbf{A}_\mu^{(+)}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_{\lambda\mu}(\vec{k}) \mathbf{a}^\lambda(\vec{k}) u_{\vec{k}}^-(x). \quad (1.4.81)$$

Daraus folgt aufgrund der Definition der Polarisationsvektoren (1.4.71-1.4.73)

$$\partial^\mu \mathbf{A}_\mu^{(+)} = -i \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} \omega(\vec{k}) [\mathbf{a}^0(\vec{k}) - \mathbf{a}^3(\vec{k})] u_{\vec{k}}^-(x). \quad (1.4.82)$$

Fourier-Transformation der Bedingung (1.4.80) liefert also als äquivalente Bedingung für die Physikalität eines Vielphotonenzustandes

$$\forall \vec{k} \in \mathbb{R}^3: \quad [\mathbf{a}^0(\vec{k}) - \mathbf{a}^3(\vec{k})] \Big| \Psi_{\text{phys}} \rangle = 0. \quad (1.4.83)$$

Für die folgenden Betrachtungen ist es nun bequemer, den folgenden Satz von Linearkombinationen der Vernichtungsoperatoren zu verwenden:

$$\mathbf{a}^\pm(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathbf{a}^0(\vec{k}) \pm \mathbf{a}^3(\vec{k})], \quad \mathbf{a}^j(\vec{k}) \quad \text{für } j \in \{1, 2\}. \quad (1.4.84)$$

Die Physikalitätsbedingung für Vielphotonenzustände lautet dann

$$\forall \vec{k} \in \mathbb{R}^3: \quad \mathbf{a}^-(\vec{k}) \Big| \Psi_{\text{phys}} \rangle = 0. \quad (1.4.85)$$

Aus den Kommutatorrelationen (1.4.75) rechnet man leicht nach, daß

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}^+(\vec{k}), \mathbf{a}^{+\dagger}(\vec{k}')] &= [\mathbf{a}^-(\vec{k}), \mathbf{a}^{-\dagger}(\vec{k}')] = 0, \\ [\mathbf{a}^+(\vec{k}), \mathbf{a}^{-\dagger}(\vec{k}')] &= [\mathbf{a}^-(\vec{k}), \mathbf{a}^{+\dagger}(\vec{k}')] = -(2\pi)^3 2\omega(\vec{k}) \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), \\ [\mathbf{a}^j(\vec{k}), \mathbf{a}^{k\dagger}(\vec{k}')] &= +(2\pi)^3 2\omega(\vec{k}) \delta^{jk} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned} \quad (1.4.86)$$

gilt und alle anderen Kommutatoren zwischen diesen Operatoren verschwinden.

Offenbar bilden nun die Vielphotonenzustandsvektoren

$$\left| \left\{ N_+(\vec{k}), N_-(\vec{k}), N_1(\vec{k}), N_2(\vec{k}) \right\}_{\vec{k} \in \mathbb{R}^3} \right\rangle = \prod_a \mathbf{a}^{+\dagger}(\vec{k}_a) \prod_b \mathbf{a}^{-\dagger}(\vec{k}_b) \prod_c \mathbf{a}^{1\dagger}(\vec{k}_c) \prod_d \mathbf{a}^{2\dagger}(\vec{k}_d) |\Omega\rangle \quad (1.4.87)$$

eine verallgemeinerte Basis des Photonen-Fock-Raumes mit indefiniter Sesquilinearform. Dabei sind die $N_j \in \mathbb{N}_0$ (mit $j \in \{+, -, 1, 2\}$), und Produkte mit $N_j = 0$ sind einfach wegzulassen. Der Unterraum der physikalischen Zustände, der durch die Bedingung (1.4.85) bestimmt ist, wird demnach genau durch diejenigen Vektoren der Gestalt (1.4.87) bestimmt, die keine Faktoren mit $\mathbf{a}^{+\dagger}$ -Operatoren enthalten. Denn für genau diese Vektoren gilt aufgrund der Kommutatorrelationen (1.4.86) die Physikalitätsbedingung (1.4.85), denn wir können ja genau dann $\mathbf{a}^-(\vec{k})$ einfach mit allen Operatoren in (1.4.87) vertauschen, und (1.4.85) ergibt sich sofort aufgrund der Definition des Vakuums gemäß (1.4.76).

Weiter gilt für die physikalischen Einphotonenzustände

$$\langle \vec{k}, i | \vec{k}', j \rangle = \delta^{ij} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), \quad i, j \in \{1, 2\} \quad (1.4.88)$$

und für die verbliebenen im physikalischen Untervektorraum V_{phys} erlaubten Linearkombinationen von unphysikalischen (zeitartigen und longitudinalen) Einphotonenzuständen

$$\langle \vec{k}, - | \vec{k}', - \rangle = 0 \quad \text{mit} \quad | \vec{k}, - \rangle = \mathbf{a}^{-\dagger}(\vec{k}) |\Omega\rangle. \quad (1.4.89)$$

Damit sind alle Skalarprodukte von Basiszuständen (1.4.87), die in V_{phys} liegen, positiv semidefinit, d.h. es gibt Vektoren in V_{phys} die nicht der Nullvektor sind, aber deren Sesquilinearform mit sich selbst verschwindet. Wir haben also einen Vektorraum mit einem sogenannten Präskalarprodukt und einer Pränorm, d.h. die Sesquilinearform ist positiv semidefinit aber nicht positiv definit. Wir erhalten nun einfach den Hilbertraum der Zustände dadurch, daß wir Vektoren, die sich nur um einen Vektor mit verschwindender Pränorm unterscheiden, identifizieren. Da die Vektoren aus V_{phys} mit verschwindender Pränorm einen Untervektorraum bilden, ist also der **Hilbertraum für physikalische Vielphotonenzustände** der **Quotientenvektorraum**

$$\mathcal{H}_{\text{phys}} = \overline{V_{\text{phys}}/V_{\text{phys}}^{(0)}} \quad \text{mit} \quad V_{\text{phys}}^{(0)} = \{|\psi\rangle \in V_{\text{phys}} | \langle \psi | \psi \rangle = 0\}. \quad (1.4.90)$$

Dabei deutet der Strich über dem Quotientenvektorraumssymbol an, daß wir den topologischen Abschluß dieses Raumes bzgl. der Pränorm betrachten.

Wir müssen nun noch zeigen, daß Skalarprodukte beliebiger physikalischer Zustände unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sind. Eine Basis des Raumes V_{phys} ist nun offenbar durch die Untermenge von Besetzungszahleigenzuständen

$$\left| \{N_+(\vec{k}) = 0, N_-(\vec{k}), N_1(\vec{k}), N_2(\vec{k})\}_{\vec{k} \in \mathbb{R}^3} \right\rangle = \prod_{b=1}^{N_-} \mathbf{a}^{-\dagger}(\vec{k}_b) \prod_{c=1}^{N_1} \mathbf{a}^{1\dagger}(\vec{k}_c) \prod_{d=1}^{N_2} \mathbf{a}^{2\dagger}(\vec{k}_d) |\Omega\rangle \quad (1.4.91)$$

gegeben. Dabei sind die $N_j \in \mathbb{N}_0$ (mit $j \in \{-, 1, 2\}$), und Produkte mit $N_j = 0$ sind wieder einfach wegzulassen. Basiszustände von verschwindender Norm sind genau diejenigen Vektoren mit $N_- \neq 0$, und diese spannen demnach den Untervektorraum V_0 des physikalischen Raumes auf, und das Skalarprodukt dieser Zustände mit *allen* anderen Basiszuständen (1.4.91) verschwindet. Folglich sind für alle Vektoren $|\psi\rangle \in V_{\text{phys}}$ die Skalarprodukte unabhängig vom Repräsentanten in $V_{\text{phys}}/V_{\text{phys}}^{(0)}$. Weiter müssen wir uns noch darüber klar werden, welche aus den Feldoperatoren gebildeten Operatoren **Observablen** repräsentieren können. Das sind offensichtlich genau solche (selbstadjungierten) Operatoren \mathbf{O} , die für alle \vec{k} mit $\mathbf{a}^-(\vec{k})$ (und dann auch mit $\mathbf{a}^{-\dagger}(\vec{k})$) vertauschen, denn dann gilt für alle $|\psi\rangle \in V_{\text{phys}}$

$$\forall \vec{k} \in \mathbb{R}^3 : \quad \mathbf{a}^-(\vec{k}) \mathbf{O} |\psi\rangle = \mathbf{O} \mathbf{a}^-(\vec{k}) |\psi\rangle = 0, \quad (1.4.92)$$

und das bedeutet, daß auch $\mathbf{O}|\psi\rangle \in V_{\text{phys}}$, und der Erwartungswert

$$\langle \mathbf{O} \rangle = \langle \psi | \mathbf{O} | \psi \rangle \quad (1.4.93)$$

ist demnach unabhängig vom Repräsentanten $|\psi\rangle$ für irgendein Element aus $\mathcal{H}_{\text{phys}}$. Offenbar erfüllen diese Bedingung alle Operatoren, die keine Operatoren $\mathbf{a}^+(\vec{k})$ oder $\mathbf{a}^{\dagger}(\vec{k})$ enthalten.

In der klassischen Elektrodynamik sind nur solche Funktionen der A_μ und ihrer Ableitungen Observablen, die **invariant unter Eichtransformationen** sind, d.h. Funktionen der Feldstärkekomponenten $F_{\mu\nu}$. Drücken wir nun aber den quantisierten Feldstärketensor mit Hilfe der Zerlegung (1.4.70) aus, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu \mathbf{A}_\nu(x) - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu(x) \\ &= -i \sum_{\lambda=0}^3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \left[k_\mu \epsilon_\nu^\lambda(\vec{k}) - k_\nu \epsilon_\mu^\lambda(\vec{k}) \right] \mathbf{a}_\lambda(\vec{k}) u_{\vec{k}}(x) + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (1.4.94)$$

Die rein räumlichen Komponenten mit $\mu, \nu \in \{1, 2, 3\}$ hängen nur von den transversalen Moden $\propto \mathbf{a}_{1,2}$ ab. Für $\mu = 0$ und für $\nu \in \{1, 2, 3\}$ folgt

$$\sum_{\lambda=0}^3 (k_0 \epsilon_\nu^\lambda - k_\nu \epsilon_0^\lambda) \mathbf{a}_\lambda = k_\nu (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_0) + k_0 \sum_{\lambda=1}^2 \mathbf{a}_\lambda = -\sqrt{2} k_\nu \mathbf{a}^- + k_0 \sum_{\lambda=1}^2 \mathbf{a}_\lambda. \quad (1.4.95)$$

Wegen der Kommutatorrelationen (1.4.86) kommutiert also $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ tatsächlich mit $\mathbf{a}^-(\vec{k})$ für alle \vec{k} , und die Unabhängigkeit der Erwartungswerte von Observablen von der Wahl des Repräsentanten eines beliebigen physikalischen Zustandes ist bewiesen.

Wir bemerken weiter, daß sich mit

$$\partial_\mu \mathbf{A}^\mu(x) = \frac{1}{\lambda} \Pi^0 = -\sqrt{2}i \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} k_0 \mathbf{a}^-(\vec{k}) u_{\vec{k}}(x) + \text{h.c.} \quad (1.4.96)$$

die folgende Klasse von **Eichtransformationen**

$$\mathbf{A}_\mu \rightarrow \mathbf{A}'_\mu = \mathbf{A}_\mu + \partial_\mu \chi \quad \text{mit} \quad \square \chi = 0 \quad (1.4.97)$$

erzeugen läßt. Diese Eichtransformationen lassen in der klassischen Theorie übrigens auch die Lorenz-Bedingung ungeändert. Die Lorenz-Bedingung legt also die Eichung nicht vollständig fest. Betrachten wir nun das **selbstadjungierte Operatorfunktional**

$$\Lambda[\chi] = \lambda \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' \left[\chi(x') \partial_\mu \dot{\mathbf{A}}^\mu(x') - \dot{\chi}(x') \partial_\mu \mathbf{A}^\mu(x') \right]. \quad (1.4.98)$$

Aufgrund der Nebenbedingung $\square \chi = 0$ und der Bewegungsgleichungen (1.4.68) zeigt man zunächst durch eine einfache Rechnung, daß

$$\dot{\Lambda} = 0 \quad (1.4.99)$$

gilt und dann unter Zuhilfenahme der kanonischen Kommutatorrelationen zu gleichen Zeiten (1.4.66), aus denen zusammen mit (1.4.65) sofort die ebenfalls benötigten Kommutatoren

$$\left[\dot{\mathbf{A}}^\mu(t, \vec{x}), \mathbf{A}_\nu(t, \vec{x}') \right] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \delta_\nu^\mu \times \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{für } \mu = 0, \\ 1 & \text{für } \mu \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (1.4.100)$$

folgen, daß

$$[i\Lambda[\chi], \mathbf{A}_\mu(x)] = \partial_\mu \chi(x) \quad (1.4.101)$$

ist. Dabei kann man wegen (1.4.99) im definierenden Integral (1.4.98) das Zeitargument $t' = t$ setzen. Mit der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel folgt daraus in der Tat

$$\exp(i\Lambda[\chi])\mathbf{A}(x)\exp(-i\Lambda[\chi]) = \mathbf{A}_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x). \quad (1.4.102)$$

Berücksichtigen wir (1.4.96), bedeutet dies, daß die Physikalität einer Observablen in der Tat deren Invarianz unter den restringierten Eichtransformationen (1.2.8) impliziert, denn offenbar vertauscht Λ für alle χ mit dem entsprechenden Operator, genau dann, wenn er für alle $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{a}_-(\vec{k})$ vertauscht. Nachdem wir nun den Hilbertraum der Zustände kontruiert und die physikalisch relevanten Observablen als eichinvariante selbstadjungierte Operatoren charakterisiert haben, können wir nun die Realisierung der **Poincaré-Gruppe** als unitäre Darstellung auf diesem Raum untersuchen. Dies geschieht weitgehend analog zum Vorgehen für das Klein-Gordon-Feld im vorigen Abschnitt. In Abschnitt 1.3.6 haben wir bereits die eichinvarianten Ausdrücke für Energie, Impuls, Drehimpuls und Schwerpunkt des klassischen elektromagnetischen Feldes hergeleitet. Allerdings können wir diese nicht ohne weiteres in den Gupta-Bleuler-Formalismus übernehmen, denn auf Operatorniveau haben wir die Eichinvarianz durch den „Eichfixierungsterm“ in der Lagrangedichte (1.4.64) explizit gebrochen. Nur für die Erwartungswerte bzgl. physikalischer Zustände dürfen wir eichinvariante Resultate erwarten.

Wir müssen nun also in zwei Schritten vorgehen: Zuerst ist zu zeigen, daß durch die **kanonischen Ausdrücke** für Energie, Impuls, Drehimpuls und Schwerpunkt die **Poincaré-Transformationen** im Sinne lokaler Feldoperatoren generiert werden, wobei wir uns auf infinitesimale Transformationen, also die durch Kommutatoren repräsentierte Lie-Algebra, beschränken können. Dann ist zu zeigen, daß die Erwartungswerte dieser Operatoren für beliebige physikalische Zustände den Erwartungswerten der entsprechenden eichinvarianten Ausdrücke entspricht, d.h. insbesondere sollten nur die beiden transversalen Photonenfreiheitsgrade zu den observablen Größen beitragen. Außerdem sollte die Energie positiv semidefinit sein.

Beginnen wir also mit der Berechnung des Energie-Impulstensors aus der Lagrangedichte (1.4.64), wobei wir uns die Ausdrücke normalgeordnet denken. Gemäß (1.3.87) lautet der Energie-Impulstensor

$$\Theta^{\mu\nu} = (\partial^\mu \mathbf{A}^\rho) \mathbf{F}_\rho{}^\nu - \lambda (\partial^\mu \mathbf{A}^\nu) (\partial_\sigma \mathbf{A}^\sigma) + \left[\frac{1}{4} \mathbf{F}_{\rho\sigma} \mathbf{F}^{\rho\sigma} + \frac{\lambda}{2} (\partial_\rho \mathbf{A}^\rho)^2 \right] g^{\mu\nu}. \quad (1.4.103)$$

Wir benötigen insbesondere die Komponenten für $\mu = 0$, und es ist für das folgende bequemer alle Zeitableitungen von Feldoperatoren durch die entsprechenden kanonischen Impulse (1.4.65) zu ersetzen. Da wir damit die manifeste Kovarianz aufgeben, verwenden wir die dreidimensionale Schreibweise, wobei sämtliche Dreiervektoranteile von Vierervektoren hinsichtlich des Vorzeichens den kontravarianten Komponenten entsprechen (mit Ausnahme von Gradienten, für den $\vec{\nabla} = (\partial_j)$ ist). Die entsprechenden Komponenten des kanonischen Energie-Impulstensors sind also

$$\begin{aligned} \Theta^{00} &= \frac{1}{2} \vec{\Pi}^2 + \frac{1}{2} \vec{\mathbf{B}}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2\lambda} (\Pi^0)^2 - \Pi^0 \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} + \vec{\Pi} \cdot \vec{\nabla} \mathbf{A}^0, \end{aligned} \quad (1.4.104)$$

und

$$\begin{aligned} \Theta^{j0} &= (\vec{\Pi} \times \vec{\mathbf{B}})^j \\ &\quad + (\vec{\Pi} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{A}^j + \Pi^0 \partial^j \mathbf{A}^0. \end{aligned} \quad (1.4.105)$$

Bedenkt man, daß gemäß (1.4.65) $\vec{\Pi} = \vec{E}$ ist, sind die oberen Zeilen die eichinvarianten Ausdrücke entsprechend dem symmetrischen Energie-Impulstensor der klassischen Theorie (1.3.96). Der Gesamtviererimpuls des Feldes ist entsprechend

$$\mathbf{P}^\mu = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} : \Theta^{\mu 0}(x) : . \quad (1.4.106)$$

Es ist sofort klar, daß für die Ausdrücke mit $\Pi^0 = -\lambda \partial_\mu \mathbf{A}^\mu$ die Matrixelemente mit beliebigen physikalischen Zuständen verschwinden, denn die entsprechenden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren kommutieren in den Operatorprodukten, so daß man entsprechend die Vernichteranteile auf den Ket und die Erzeugeranteile auf den Bra im Matrixelement wirken lassen darf, und physikalische Zustände sind ja vermöge der Gupta-Bleuler-Bedingung (1.4.80) gerade dadurch definiert, daß dies 0 ergibt. Dies ist auch für den letzten Ausdruck in (1.4.105) der Fall, denn es ist $\partial^j \mathbf{A}^0 = \Pi^j - \dot{\mathbf{A}}^j$, und dieser Ausdruck kommutiert mit Π^0 . Der Ausdruck $(\vec{\Pi} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{A}^\mu$ verschwindet vermöge partieller Integration und der Bewegungsgleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ für ein freies elektrisches Feld, wobei wir voraussetzen, daß wir nur solche Zustände betrachten, für die die entsprechenden Erwartungswerte im Unendlichen hinreichend schnell abfallen.

In der Tat ergeben die kanonischen Kommutatorrelationen (1.4.66) nach einer einfachen Rechnung

$$-i \delta a^\nu [\mathbf{A}^\mu(x), \mathbf{P}_\nu] = \delta a^\nu \partial_\nu \mathbf{A}^\mu(x). \quad (1.4.107)$$

Die Viererimpulse erzeugen also Transformationen entsprechend dem Transformationsverhalten der klassischen Felder unter raum-zeitlichen Translationen (1.3.86).

Für die Erwartungswerte des Viererimpulses erhält man gemäß (1.4.106) für alle $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{phys}}$

$$\langle \Psi | \mathbf{P}^\mu | \Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \widetilde{d^3\vec{k}} \begin{pmatrix} \omega(\vec{k}) \\ \vec{k} \end{pmatrix} \sum_{\lambda=1,2} \langle \Psi | \mathbf{a}^{\lambda\dagger}(\vec{k}) \mathbf{a}^\lambda(\vec{k}) | \Psi \rangle . \quad (1.4.108)$$

Es tragen also in der Tat nur die transversalen Polarisationszustände bei, und die Energie ist positiv semidefinit, da dies auf die Summe unter dem Integral zutrifft und $\omega(\vec{k}) = |\vec{k}| \geq 0$ ist.

Ebenso finden wir unter Berücksichtigung des Zusatzterms aufgrund der Eichfixierung aus (1.3.82) und (1.3.105) und (1.3.107) den Drehimpulsdichtetensor zu

$$\mathbf{j}^{\rho\sigma\nu} = x^\rho \Theta^{\sigma\nu} - x^\sigma \Theta^{\rho\nu} + \mathbf{F}^{\rho\nu} \mathbf{A}^\sigma - \mathbf{F}^{\sigma\nu} \mathbf{A}^\rho - \lambda (\partial_\alpha \mathbf{A}^\alpha) (g^{\rho\nu} \mathbf{A}^\sigma - g^{\sigma\nu} \mathbf{A}^\rho) \quad (1.4.109)$$

und damit für die Erzeuger von Boosts und Drehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^a &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} : (t \Theta^{a0} - x^a \Theta^{00} - \mathbf{A}^0 \Pi^a + \Pi^0 \mathbf{A}^a) : , \\ \mathbf{J}^a &= \epsilon^{abc} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} : (x^b \Theta^{c0} - \mathbf{A}^b \Pi^c) : . \end{aligned} \quad (1.4.110)$$

In der Tat ergeben sich durch Anwendung der kanonischen Kommutatorrelationen die korrekten Transformationsformeln für die Feldoperatoren:

$$\begin{aligned} i \left[\mathbf{A}^0(x), \delta \vec{\eta} \cdot \vec{\mathbf{K}} \right] &= \delta \vec{\eta} \cdot (t \vec{\nabla} + \vec{x} \partial_t) \mathbf{A}^0(x) - \delta \vec{\eta} \cdot \vec{\mathbf{A}}(x), \\ i \left[\mathbf{A}^j(x), \delta \vec{\eta} \cdot \vec{\mathbf{K}} \right] &= \delta \vec{\eta} (t \vec{\nabla} + \vec{x} \partial_t) \mathbf{A}^j - \delta \eta^j \mathbf{A}^0, \\ i \left[\mathbf{A}^0(x), \delta \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathbf{J}} \right] &= (\delta \vec{\varphi} \times \vec{\nabla}) \mathbf{A}^0(x), \\ i \left[\mathbf{A}^j(x), \delta \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathbf{J}} \right] &= (\delta \vec{\varphi} \times \vec{\nabla}) \mathbf{A}^j(x) - [\delta \vec{\varphi} \times \vec{\mathbf{A}}(x)]^j. \end{aligned} \quad (1.4.111)$$

Es ist auch wieder leicht zu zeigen, daß für die Erwartungswerte der Schwerpunktsbewegung $\vec{\mathbf{K}}$ und des Gesamtdrehimpulses $\vec{\mathbf{J}}$ die nichteichinvarianten Operatorausdrücke herausfallen. Eine eindeutige eichinvariante Aufspaltung des Gesamtdrehimpulses in einen Bahn- und Spin-Anteil ist hingegen nicht möglich. Insgesamt haben wir also eine konsistente und manifest kovariante Realisierung der Poincaré-Gruppe für masselose Teilchen mit Spin 1 gefunden, in der sich die Feldoperatoren lokal, also wie die entsprechenden klassischen Feldgrößen, transformieren, und die Erzeuger der Gruppe liefern die zu erwartenden physikalischen Observablen. Die Energie ist positiv semidefinit und damit das physikalische Vakuum der Grundzustand, der invariant unter Poincaré-Transformationen ist. Wie beim skalaren Feld halten wir noch fest, daß hierbei eine Quantisierung als Fermionen-Feld inkonsistent wäre, da dann die Normalordnung nicht zu einer nach unten beschränkten Energie führen würde und somit kein stabiler Grundzustand existieren würde. Dies ist wieder ein Spezialfall des allgemeinen Spin-Statistik-Theorems.

1.5 Das Dirac-Feld

1.5.1 Das klassische Dirac-Feld

Mit dem Ziel, eine in sich konsistente relativistische Wellenmechanik zu konstruieren, stellte Dirac nach dem Vorbild der nichtrelativistischen Schrödinger-Gleichung eine relativistische Wellengleichung auf, die die Zeitableitung nur in erster Ordnung enthält. Aus Gründen der Lorentz-Symmetrie mußten auch die Ortsableitungen in erster Ordnung in die Gleichung eingehen. Außerdem mußte aus der Gleichung auch die Massenschalenbedingung $-(\square + m^2)\psi(x) = 0$ folgen. Es zeigte sich, daß dieses Programm nur mit einem **vierkomponentigen Dirac-Spinorfeld** ψ mit der Hilfe von vier **Dirac-Matrizen** γ^μ möglich war:

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m\mathbf{1}_4)\psi = 0. \quad (1.5.1)$$

Zur Abkürzung hat Feynman seine „Slash-Notation“ eingeführt: $\not{\partial} := \gamma^\mu \partial_\mu$. Multiplizieren wir nun die Dirac-Gleichung (1.5.1) mit $i\not{\partial} + m\mathbf{1}_4$, erhalten wir

$$(-\not{\partial}^2 - m^2\mathbf{1}_4)\psi = 0. \quad (1.5.2)$$

Damit dies der Massenschalenbedingung entspricht, verlangen wir

$$\not{\partial}^2 = \square \quad (1.5.3)$$

bzw. noch allgemeiner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}_4. \quad (1.5.4)$$

Es ist klar, daß aus (1.5.4) tatsächlich (1.5.3)

$$\not{\partial}^2 = \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{1}_4 = \square \mathbf{1}_4 \quad (1.5.5)$$

folgt. In einer 2×2 -Blocknotation lautet eine für unsere Zwecke besonders bequeme Realisierung⁷ der Dirac-Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5.6)$$

⁷Dies ist die chirale oder Weyl-Darstellung.

mit den bekannten Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.5.7)$$

Die Antikommutatorrelationen (1.5.4) folgen sofort aus den Antikommutatorrelationen für die Pauli-Matrizen

$$\{\sigma^j, \sigma^k\} = 2\delta^{jk}\mathbf{1}_2. \quad (1.5.8)$$

Wir notieren weiter noch die **Pseudohermitizität der Diracmatrizen**

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu \Leftrightarrow \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (1.5.9)$$

Das Verhalten unter **Lorentz-Transformationen** können wir herleiten, indem wir fordern, daß die Dirac-Gleichung forminvariant unter Lorentztransformationen ist. Dabei soll sich das Feld linear transformieren:

$$x' = \Lambda x, \quad \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x). \quad (1.5.10)$$

Um $S(\Lambda)$ zu finden, bemerken wir, daß

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \quad (1.5.11)$$

gilt. Setzen wir dies in die Diracgleichung für das transformierte Feld ein, erhalten wir

$$(i\cancel{D}' - m)\psi'(x') = [i(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \gamma^\mu \partial_\nu - m] S(\Lambda)\psi(x). \quad (1.5.12)$$

Multiplizieren wir diese Gleichung von links mit $S^{-1}(\Lambda)$ folgt die Diracgleichung für das transformierte Feld, wenn

$$(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \gamma^\nu \Rightarrow S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \quad (1.5.13)$$

Wir berechnen zunächst $S(\Lambda)$ für eine infinitesimale Lorentztransformation

$$\Lambda = \mathbf{1} + \delta\omega, \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu. \quad (1.5.14)$$

Aus der Eigenschaft der Lorentztransformation, daß es Minkowskiprodukte zwischen beliebigen Vierervektoren invariant läßt, folgt

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}. \quad (1.5.15)$$

Setzen wir darin (1.5.14) ein, ergibt sich aus dieser Bedingung, daß

$$\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu} \quad (1.5.16)$$

ist. Wir setzen nun

$$S(\Lambda) = \mathbf{1}_4 + \frac{1}{8} \delta\omega_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu}, \quad S^{-1}(\Lambda) = \mathbf{1}_4 - \frac{1}{8} \delta\omega_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu}, \quad (1.5.17)$$

wobei $\gamma^{\mu\nu} = -\gamma^{\nu\mu}$ eine geeignete 4×4 -Matrix bezeichnen soll, die im Diracspinorraum wirkt. Bei der Matrixinversion haben wir nur die erste Ordnung in $\delta\omega$ berücksichtigt. Um nun $\gamma^{\mu\nu}$ zu bestimmen, wenden wir diesen Ansatz auf (1.5.13) an, wobei wir wieder bis zur ersten Ordnung in $\delta\omega$ entwickeln. Nach kurzer Rechnung folgt

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, \gamma^{\rho\sigma}] &= 4(g^{\mu\rho} \gamma^\sigma - g^{\mu\sigma} \gamma^\rho) = 2(\{\gamma^\mu, \gamma^\rho\} \gamma^\sigma - \gamma^\rho \{\gamma^\mu, \gamma^\sigma\}) \\ &= 2[\gamma^\mu, \gamma^\rho \gamma^\sigma] = [\gamma^\mu, [\gamma^\rho, \gamma^\sigma]] \end{aligned} \quad (1.5.18)$$

Dabei haben wir im letzten Schritt benutzt, daß $\gamma^{\rho\sigma} = -\gamma^{\sigma\rho}$ ist. Wir können also

$$\gamma^{\rho\sigma} = [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] \quad (1.5.19)$$

setzen. Für endliche Lorentztransformationen folgt durch Anwenden der Matrix-Exponentialfunktion

$$S(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{8}\omega_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right). \quad (1.5.20)$$

Aus der Pseudohermitizität (1.5.9) und $(\gamma^0)^2 = 1$ folgt

$$\gamma^0(\gamma^{\rho\sigma})^\dagger\gamma^0 = \gamma^{\sigma\rho} = -\gamma^{\rho\sigma} \quad (1.5.21)$$

und damit

$$S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0, \quad (1.5.22)$$

d.h. $S(\Lambda)$ ist pseudounitär. Es ist wichtig zu bemerken, daß $S(\Lambda)$ nicht wirklich unitär ist. Dies weist schon darauf hin, daß eine Einteilchenquantentheorie auf der Basis der Diracgleichung widersprüchlich in sich selbst ist, denn in einer solchen Quantentheorie sollten *alle* eigentlich orthochronen Lorentztransformationen unitär dargestellt werden. Dies ist aber nicht der Fall, wie wir nun zeigen wollen. Betrachten wir zunächst einen **Boost** in der Richtung \vec{n} ($\vec{n}^2 = 1$). Die entsprechende Matrix besitzt die Form

$$\Lambda(\vec{n}) = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\vec{n}^t \sinh \eta \\ -\vec{n} \sinh \eta & \cosh \eta P_{\parallel}(\vec{n}) + P_{\perp}(\vec{n}) \end{pmatrix} \quad (1.5.23)$$

mit den Projektionsoperatoren (reelle 3×3 -Matrizen)

$$P_{\parallel}(\vec{n}) = \vec{n} \otimes \vec{n}, \quad P_{\perp} = 1_3 - \vec{n} \otimes \vec{n}. \quad (1.5.24)$$

Die Boostgeschwindigkeit ist $v = \sinh \eta / \cosh \eta = \tanh \eta$. Entwickeln wir für ein infinitesimales $\delta \eta$ (1.5.23) bis zur ersten Ordnung, finden wir die Exponentialdarstellung

$$\Lambda_B(\vec{\eta}) = \exp(i\vec{\eta} \cdot \vec{K}) \quad \text{mit} \quad \vec{\eta} = \eta \vec{n}, \quad (1.5.25)$$

wobei

$$K^j = i \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_j^t \\ \vec{e}_j & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.5.26)$$

Für die infinitesimale Transformation ist

$$\delta x^0 = -\delta \vec{\eta} \cdot \vec{x}, \quad \delta x^j = -\delta \eta^j x^0 \Rightarrow \omega_{\rho 0} = -\omega_{0\rho} = \begin{cases} 0 & \text{für } \rho = 0, \\ \eta^\rho & \text{für } \rho \in \{1, 2, 3\}, \end{cases} \quad (1.5.27)$$

$$\omega_{00} = \omega_{jk} = 0 \quad \text{für } j, k \in \{1, 2, 3\}.$$

Um die Darstellungsmatrix $S(\Lambda_B)$ zu finden, benötigen wir für die Boosts also

$$\gamma^{0\mu} = \gamma^0 \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^0 = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu = 0, \\ 2\gamma^0 \gamma^\mu & \text{für } \mu \in \{1, 2, 3\}. \end{cases} \quad (1.5.28)$$

Damit wird

$$\frac{1}{8}\omega_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\omega_{0\rho}\gamma^{0\rho} = -\frac{1}{2}\gamma^0 \vec{\eta} \cdot \vec{\gamma} =: -i\vec{\eta} \cdot \vec{x}. \quad (1.5.29)$$

Unter Verwendung der Darstellung (1.5.6) ist

$$\vec{x} = \frac{i}{2} \vec{\gamma} \gamma^0 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (1.5.30)$$

Es ist wichtig zu bemerken, daß diese Matrix **antihermitesch** und folglich die Darstellung der Boosts

$$S_B[\vec{\eta}] =: S_{\vec{n}}(\eta) = \exp(-i\eta \vec{n} \cdot \vec{x}) \quad (1.5.31)$$

nicht unitär ist⁸. Wir werden unten sehen, daß die Lorentztransformationen erst für die Quantenfeldtheorie unitär realisiert werden. Wir können (1.5.31) explizit auswerten, denn es gilt

$$(i\vec{n} \cdot \vec{x})^2 = \frac{1}{4} (\gamma^0 \vec{n} \cdot \vec{\gamma})^2 = -\frac{1}{4} (\vec{n} \cdot \vec{\gamma})^2 = \frac{\vec{n}^2}{4}. \quad (1.5.32)$$

Summiert man also die Exponentialreihe (1.5.31) auf, folgt

$$S_B(\vec{\eta}) = \gamma^0 \left[\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \gamma^0 - \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right) \vec{n} \cdot \vec{\gamma} \right]. \quad (1.5.33)$$

Dies kann man einfacher in der Form

$$S_B(\vec{\eta}) = \gamma^0 \Psi \quad \text{mit} \quad U = \begin{pmatrix} \cosh(\eta/2) \\ \sinh(\eta/2) \vec{n} \end{pmatrix} \quad (1.5.34)$$

schreiben. In den Komponenten der Vierergeschwindigkeit des Teilchens

$$u = \begin{pmatrix} \cosh \eta \\ \vec{n} \sinh \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad (1.5.35)$$

ausgedrückt ist

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \\ \vec{n} \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (1.5.36)$$

Wenden wir uns nun den Drehungen zu. Diese transformieren definitionsgemäß nur die räumlichen Komponenten untereinander, d.h. in (1.5.20) ist

$$\omega_{00} = \omega_{0j} = -\omega_{j0} = 0, \quad \omega_{jk} = -\epsilon_{jkl} \varphi^l \quad \text{für} \quad j, k \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.5.37)$$

Für infinitesimale Drehungen folgt daraus in der Tat

$$x'^0 = x^0, \quad x'^j = x^j + \epsilon^{jkl} \delta \varphi^l x^k = x^j - (\delta \vec{\varphi} \times \vec{x})^j. \quad (1.5.38)$$

Durch Exponentiation folgt daraus die endliche Drehung zu

$$\vec{x}' = \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{x}) - \sin \varphi \vec{n} \times \vec{x} + \cos \varphi P_{\perp}(\vec{n}) \vec{x} \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \frac{\vec{\varphi}}{\varphi}. \quad (1.5.39)$$

⁸Die gruppentheoretische Analyse der Darstellungen der eigentlich orthochronen Lorentzgruppe zeigen, daß es keine nichttrivialen endlichdimensionalen unitären Darstellungen der Lorentzgruppe bzw. der dazugehörigen Überlagerungsgruppe $SL(2, \mathbb{C})$ gibt. Dies liegt daran, daß die Lorentzgruppe im Gegensatz zur Drehgruppe **nicht kompakt** ist. Die Drehgruppe $SO(3)$ bzw. deren Überlagerungsgruppe $SU(2)$ ist hingegen kompakt, und wie wir gleich zeigen werden, wird die Drehgruppe in der Tat durch unitäre Transformationen dargestellt. Dies werden wir im nächsten Kapitel noch ausführlich erörtern

Weiter ist

$$\gamma^{jk} = - \begin{pmatrix} [\sigma^j, \sigma^k] & 0 \\ 0 & [\sigma^j, \sigma^k] \end{pmatrix} = -2i\epsilon^{jkl} \begin{pmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & \sigma^l \end{pmatrix} =: -4i\epsilon^{jkl}\Sigma^l. \quad (1.5.40)$$

Wir notieren noch

$$\Sigma^l = \frac{i}{8}\epsilon^{jkl}\gamma^{jk} = \frac{i}{4}\epsilon^{jkl}\gamma^j\gamma^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & \sigma^l \end{pmatrix}. \quad (1.5.41)$$

Mit (1.5.37) folgt daraus

$$S_D(\vec{\varphi}) = \exp\left(\frac{1}{8}\omega_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right) = \exp(i\vec{\varphi}\cdot\vec{\Sigma}). \quad (1.5.42)$$

Dies macht die hier verwendete Weyl-Darstellung der Diracmatrizen bequem: Der Spinoperator ist Block-diagonal mit den Spinmatrizen $\sigma^l/2$ auf den Diagonalblöcken. Da die $\vec{\Sigma}$ **hermitesche Matrizen** sind, werden Drehungen gemäß (1.5.42) in der Tat **unitär** dargestellt. Wegen

$$(\vec{n}\cdot\vec{\Sigma})^2 = \mathbf{1}_4 \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \frac{\vec{\varphi}}{\varphi}, \quad \varphi = |\vec{\varphi}| \quad (1.5.43)$$

ergibt sich für (1.5.42) durch Anwendung der Exponentialreihe leicht die geschlossene Form für Drehungen:

$$S_D(\vec{\varphi}) = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\mathbf{1}_4 + i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{n}\cdot\vec{\Sigma}. \quad (1.5.44)$$

Üblicherweise definiert man statt der $\gamma^{\mu\nu}$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\gamma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (1.5.45)$$

so daß die Darstellungsmatrix einer beliebigen $SO(1,3)^\uparrow$ -Transformation mit Hilfe der sechs Parameter $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ in der Form

$$S(\omega_{\mu\nu}) = \exp\left(\frac{1}{8}\omega_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) \quad (1.5.46)$$

dargestellt wird. Der Zusammenhang zu $\vec{\chi}$ und $\vec{\Sigma}$ ergibt sich dann aus (1.5.30) bzw. (1.5.41) zu

$$\chi^a = \frac{i}{4}[\gamma^a, \gamma^0] = \sigma^{a0} = -\sigma^{0a}, \quad \Sigma^a = \frac{i}{8}\epsilon^{abc}\gamma^{bc} = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\sigma^{bc}. \quad (1.5.47)$$

Nun kommen wir auf die Dirac-Gleichung (1.5.1) und den Dirac-Spinor ψ zurück. Bezüglich Drehungen setzt sich in unserer chiralen Darstellung der Diracmatrizen der Dirac-Spinor aus zwei **Weyl-Spinoren** gemäß

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_L \\ \xi_R \end{pmatrix} \quad (1.5.48)$$

zusammen. Dabei sind die $\xi_{L,R} \in \mathbb{C}^2$ zweikomponentige Weylspinoren, die sich wegen (1.5.42-1.5.48) unter Drehungen auch als solche transformieren. Dies weist schon darauf hin, daß ein Dirac-Feld stets **zwei Spin-1/2-Teilchen** beschreibt. Wie wir unten sehen werden, entspricht das **einem Teilchen und dem dazugehörigen Antiteilchen**.

Aus der Struktur der Dirac-Darstellung der Lorentzgruppe, die sich aus beliebigen Produkten von Boost- und Drehmatrizen (1.5.34) bzw. (1.5.42) ergibt, folgt, daß **Lorentz-Skalare** mit Hilfe des **Dirac-adjungierten** Zeilenspinors

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0 \quad (1.5.49)$$

gebildet werden müssen. In der Tat ist dann wegen (1.5.10) aufgrund von (1.5.22)

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^\dagger(x')\gamma^0 = \psi^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \bar{\psi}(x)\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda). \quad (1.5.50)$$

Daraus folgt sofort, daß

$$\bar{\psi}'(x')\psi(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (1.5.51)$$

gilt, also $\bar{\psi}\psi$ ein **Skalarfeld** ist. Ebenso folgt aus (1.5.13), daß

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad (1.5.52)$$

ein **Vektorfeld** ist.

Als nächstes leiten wir aus der Dirac-Gleichung die entsprechende Gleichung für den Dirac-adjungierten Spinor her. Dazu müssen wir nur (1.5.1) hermitesch adjungieren und mit dem Dirac-Adjungierten darstellen:

$$\bar{\psi}(x)\gamma^0(-i\overleftarrow{\mathcal{D}}^\dagger - m) = 0. \quad (1.5.53)$$

Dies von rechts mit γ^0 multipliziert liefert wegen der Pseudohermitizitätsrelation (1.5.9)

$$\bar{\psi}(x)(-i\overleftarrow{\mathcal{D}} - m) = 0. \quad (1.5.54)$$

Bilden wir die Viererdivergenz von (1.5.52), folgt mit der Dirac-Gleichung (1.5.1) und ihrer Adjungierten (1.5.54)

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (1.5.55)$$

d.h. die dazugehörige Ladung

$$Q = \int d^3\vec{x} j^0(x) = \int d^3\vec{x} \psi^\dagger(x)\psi(x) \quad (1.5.56)$$

ist **erhalten**. Insofern wählte sich Dirac schon am Ziel, eine konsistente Einteilchen-Interpretation für seine Wellengleichung analog zur nichtrelativistischen Quantenmechanik gefunden zu haben. Allerdings ergeben sich für die ebenen Wellen, die Lösungen für Teilchen mit bestimmtem Impuls entsprechen sollen, stets Lösungen mit positiver und solche mit negativer Frequenz $\omega = \pm E(\vec{k})$. Es stellte sich weiter heraus, daß für die relativistisch konstruierbaren Wechselwirkungen (allen voran die elektromagnetische) bei einer Anfangswellenfunktion, die nur aus der Superposition von Moden mit positiven Frequenzen (also in der Einteilcheninterpretation positiven Energien) gebildet wird, vermöge der Zeitentwicklung zu späteren Zeiten stets Moden mit negativen Frequenzen beigemischt werden. Die Projektion auf Moden positiver Frequenz ist also nicht verträglich mit der Zeitentwicklung, so daß die Moden mit negativer Frequenz notwendig zum Einteilchen-Hilbert-Raum der Wellenfunktionen hinzugefügt werden müssen. Dies hat nun notwendig zur Folge, daß die naive Interpretation der Diracgleichung im Sinne der Einteilchenwellenmechanik zu einer Theorie führt, für die der Hamilton-Operator nicht nach unten beschränkt ist, d.h. es existiert kein stabiler Grundzustand. Diracs genialer Ausweg war es, zu postulieren, daß im Grundzustand alle Zustände mit negativer Energie besetzt sind. Dieser

Dirac-See sollte sich dann in hochenergetischen Reaktionen bemerkbar machen, die ein Elektron aus dem See herausschlagen können. Dieses **Loch im Diracsee** verhält sich dann wie ein Teilchen mit der Elektronenmasse aber positiver Ladung. Auf diese Weise gelangte Dirac (allerdings nach einigen interpretatorischen Komplikationen) zur Vorhersage der Existenz von **Antiteilchen**. Diese **Löchertheorie** ist äquivalent zu der quantenfeldtheoretischen Auffassung, die wir als nächstes entwickeln werden. Der Einführung des Dirac-Sees entspricht in der Quantenfeldtheorie einfach der **Feynman-Stückelberg-Trick** und die nachfolgende Normalordnung der Observablen wie Energie, Impuls, Ladung usw.

Das Vorgehen entspricht genau dem beim elektromagnetischen Feld: Wir stellen als erstes eine **Lorentz-invariante Lagrange-Dichte** auf, gehen zum (nicht manifest kovarianten) Hamilton-Formalismus über und deuten die kanonischen Feld-Poisson-Klammerbeziehungen zu **Antikommutatoren** um. Es stellt sich nämlich heraus, daß Kommutatoren für Dirac-Teilchen nicht zum Ziel führen (insbesondere ergibt sich kein nach unten beschränkter Hamiltonoperator). Dies ist eine weitere Manifestation des oben erwähnten Spin-Statistik-Theorems, wonach Teilchen mit halbzahligen Spin⁹ stets Fermionen sind.

Um die Quantisierung des Feldes vorzubereiten, stellen wir zunächst die Lagrange-Dichtefunktion auf. Da die Feldgleichung eine Differentialgleichung erster Ordnung ist, darf die Lagrange-Dichte die Ableitungen nur linear enthalten. Da wir freie Teilchen beschreiben wollen, muß die Lagrangedichte eine Bilinearform des Dirac-Spinorfeldes sein, und damit die Lorentzinvarianz sichergestellt ist, sollte sie ein Skalarfeld ergeben. Dadurch werden wir auf die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\rlap{\not{D}} - m)\psi \quad (1.5.57)$$

geführt. Da $\psi \in \mathbb{C}^4$ ist, können wir wieder ψ und $\bar{\psi}$ als voneinander unabhängige Felder betrachten und getrennt voneinander variieren. Die Euler-Lagrangegleichungen ergeben dann in der Tat die Dirac-Gleichung (1.5.1) und die daraus folgende Gleichung für das Dirac-adjungierte Feld (1.5.53).

Zum Übergang zum Hamilton-Formalismus, benötigen wir als nächstes die kanonisch konjugierten Feldimpulse. Es ergibt sich

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\psi^\dagger, \quad \bar{\Pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0. \quad (1.5.58)$$

Auf den ersten Blick sieht dies fatal aus, da offenbar der kanonische Impuls zum adjungierten Feld verschwindet. Scheinbar sehen wir uns vor ähnliche Probleme gestellt wie oben beim elektromagnetischen Feld. Dies ist aber lediglich Folge der besonderen Struktur der Lagrangedichte. Man könnte dies beheben, wenn man den Ausdruck in ψ und $\bar{\psi}$ symmetrisiert, was nur um eine totale Divergenz von (1.5.57) verschieden wäre, was im Variationsprinzip keine Änderung für die Feldgleichungen ergibt. Wesentlich ist nur, daß wir die Hamiltondichte mit dem Feldimpuls und dem Feld und seinen räumlichen Ableitungen ausdrücken können, und das ist in der Tat der Fall:

$$\mathcal{H} = \Pi\dot{\psi} - \mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^0\partial_t\psi - i\bar{\psi}(\rlap{\not{D}} + im)\psi = \bar{\psi}(-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m)\psi = -\Pi\gamma^0(\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + im)\psi. \quad (1.5.59)$$

Die kanonischen Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{\psi} = \frac{\delta H}{\delta \Pi} = -\gamma^0(\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + im)\psi, \quad \dot{\bar{\Pi}} = -\frac{\delta H}{\delta \psi} = \Pi\left(-\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + im\right). \quad (1.5.60)$$

⁹Dirac-Teilchen haben, wie wir oben anhand des Verhaltens der Dirac-Spinoren unter Drehungen gesehen haben, Spin 1/2.

Multiplikation der ersten Gleichung von links mit $i\gamma^0$ und Zusammenfassen der Terme auf einer Seite liefert wieder die Diracgleichung (1.5.1). Multiplikation der zweiten Gleichung von rechts her mit $i\gamma^0$ und Zusammenfassung der Terme liefert die Gleichung (1.5.53) für $\Pi\gamma^0$. Aufgrund der besonderen Struktur der obigen Lagrangedichte ergibt sich der Zusammenhang (1.5.58) zwischen Feld und kanonisch konjugiertem Impuls nicht aus den kanonischen Gleichungen. Es ergibt sich aber keine Inkonsistenz, diese Beziehung einfach als **Nebenbedingung** zu fordern, d.h. wir können

$$\Pi = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\psi^\dagger \quad (1.5.61)$$

setzen.

1.5.2 Quantisierung des freien Dirac-Feldes

Die Quantisierung des Diracfeldes erfolgt nun dadurch, daß wir ψ durch einen Operator ψ ersetzen. Wir fordern nun aber wegen des Spin-Statistik-Theorems keine kanonischen Kommutatorregeln sondern **kanonische Antikommutatorregeln**. Wie wir sehen werden, ist dies kein Widerspruch zur allgemeinen quantentheoretischen Dynamik, denn die Observablen werden stets durch Funktionen aus einer *geraden Anzahl* von Fermionenfeldoperatoren aufgebaut; insbesondere die Hamiltondichte ist eine bilineare Form in den Feldern. Wie wir zeigen werden, erfüllt der dazugehörige Hamiltonoperator die korrekten Kommutatorrelationen mit den Feldern, so daß sich aus der Quantendynamik wieder die Dirac-Gleichung für den Feldoperator ergeben wird, wie es sein muß. Wir verlangen also die **Antikommutator-Relationen zu gleichen Zeiten**

$$\{\psi_a(t, \vec{x}), \psi_b(t, \vec{y})\} = 0, \quad \{\psi_a(t, \vec{x}), \Pi_b(t, \vec{y})\} = i\{\psi_a(t, \vec{x}), \psi_b^\dagger(t, \vec{y})\} = i\delta_{ab}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (1.5.62)$$

Die $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$ numerieren dabei die Dirac-Spinorkomponenten durch.

Wir berechnen nun die Modenentwicklung nach ebenen Wellen. Wir erwarten für die Teilchen und Antiteilchen jeweils zwei Spinfreiheitsgrade (insgesamt also vier Feldfreiheitsgrade für jede Impulsmode). Wie in der relativistischen Teilchenphysik üblich, wird der Spin im Ruhesystem des Teilchens gemessen. Es sei also $\sigma = \pm 1/2$ der Eigenzustand zum Spinoperator Σ^3 für $\vec{k} = 0$. Es ist sehr zweckmäßig und bequem, die übrigen Zustände durch einen drehungsfreien Lorentzboost in Richtung von \vec{k} , d.h. durch

$$\Lambda_B(-\eta\vec{n}) \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = k \quad \text{mit} \quad \eta = \text{arcosh} \left(\frac{E(\vec{k})}{m} \right), \quad \vec{n} = \frac{\vec{k}}{K}, \quad (1.5.63)$$

zu definieren. Dieses Programm führen wir nun aus. Dazu definieren wir zunächst die **Feldmoden mit positiver Frequenz** durch

$$u_{\vec{k},+}^\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E(\vec{k})}} \exp(-ik \cdot x)|_{k^0=E(\vec{k})}, \quad (1.5.64)$$

Die korrekte quantenfeldtheoretische Modenentwicklung muß mit dem **Feynman-Stückelberg-Trick**, der einfach darin besteht, den Feldmoden mit negativer Frequenz einen Erzeugungs- statt einen Vernichtungsoperators zuzuordnen, wie folgt aussehen

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \sum_{\sigma} \left[\mathbf{a}(\vec{k}, \sigma) u(\vec{k}, \sigma) u_{\vec{k},+}^\sigma(x) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{k}, \sigma) v(\vec{k}, \sigma) u_{\vec{k},+}^*(x) \right]. \quad (1.5.65)$$

Damit diese Funktion die Dirac-Gleichung erfüllt, müssen die Spinoren u und v offenbar den Gleichungen

$$(\not{k} - m)u(\vec{k}, \sigma) = 0, \quad (\not{k} + m)v(\vec{k}, \sigma) = 0 \quad \text{mit} \quad k^0 = E(\vec{k}) \quad (1.5.66)$$

genügen. Es ist klar, daß beide Gleichungen mit der Onshell-Bedingung $k^0 = E(\vec{k})$ verträglich sind, denn multipliziert man die Gleichungen jeweils mit $\not{k} \pm m$, erhält man die Forderung $k^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2 = m^2$.

Für $\vec{k} = 0$ erhalten wir die Gleichungen

$$\gamma^0 u(0, \sigma) = u(0, \sigma), \quad \gamma^0 v(0, \sigma) = -v(0, \sigma). \quad (1.5.67)$$

Setzt man die Diracmatrix γ^0 ein, erhält man die linear unabhängigen Lösungen

$$\begin{aligned} u(0, +1/2) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \sqrt{m} u'(0, +1/2), & u(0, -1/2) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: \sqrt{m} u'(0, -1/2), \\ v(0, +1/2) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \sqrt{m} v'(0, +1/2), & v(0, -1/2) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =: \sqrt{m} v'(0, -1/2). \end{aligned} \quad (1.5.68)$$

Die etwas ungewohnte Normierung ist bequem, wie wir gleich noch sehen werden. Jetzt führen wir den Boost (1.5.63) aus. Mit (1.5.36) erhalten wir dabei unter Berücksichtigung von $\gamma = E(\vec{k})/m := E/m$ und den Eigenwertgleichungen (1.5.67) für die Felder bei $\vec{k} = 0$

$$\begin{aligned} u(\vec{k}, \sigma) &= \sqrt{\frac{1}{2(E+m)}} (m + \not{k}) u'(0, \sigma), \\ v(\vec{k}, \sigma) &= \sqrt{\frac{1}{2(E+m)}} (m - \not{k}) v'(0, \sigma). \end{aligned} \quad (1.5.69)$$

Es ist wichtig zu bemerken, daß dies i.a. *keine* Eigenzustände des Spinoperators Σ^3 sind, da Σ^3 i.a. *nicht* mit dem Boost $S_B(\vec{\eta})$ kommutiert. Vielmehr besitzt konstruktionsgemäß das Teilchen in seinem Ruhssystem eine wohldefinierte Spin-z-Komponente $\sigma \in \{\pm 1\}$.

Für ein masseloses Teilchen wird

$$\begin{aligned} u(\vec{k}, \sigma) &= \sqrt{\frac{1}{2E}} \not{k} u'(0, \sigma), \\ v(\vec{k}, \sigma) &= \sqrt{\frac{1}{2E}} (-\not{k}) v'(0, \sigma). \end{aligned} \quad (1.5.70)$$

In diesem Fall repräsentieren diese Zustände für Teilchen, die sich in z-Richtung bewegen, Zustände mit bestimmter **Helizität**. Die Helizität ist dabei als die Projektion des Spins auf die Impulsrichtung definiert, d.h. der entsprechende Operator ist

$$\mathbf{h} = \frac{\vec{k} \cdot \vec{\Sigma}}{|\vec{k}|}. \quad (1.5.71)$$

Es ist leicht zu zeigen, daß \mathbf{h} mit den γ^μ vertauscht. Für $\vec{k} = k^3 \vec{e}_3$ ist also

$$\mathbf{h}u(k^3 \vec{e}_3, \sigma) = \sigma u(k^3 \vec{e}_3, \sigma), \quad \mathbf{h}v(k^3 \vec{e}_3, \sigma) = \sigma v(k^3 \vec{e}_3, \sigma). \quad (1.5.72)$$

Für masselose Teilchen sind also u und v Eigenzustände der Helizität in dem Bezugssystem, in dem $\vec{k} \parallel \vec{e}_3$ ist, zu den Eigenwerten $\sigma \in \{-1/2, +1/2\}$.

Für praktische Rechnungen benötigen wir noch die folgenden „Pseudoorthogonalitätsrelationen“

$$\bar{u}(\vec{k}, \sigma) u(\vec{k}, \sigma') = 2m \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad \bar{v}(\vec{k}, \sigma) v(\vec{k}, \sigma') = -2m \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad (1.5.73)$$

$$\bar{u}(\vec{k}, \sigma) v(\vec{k}, \sigma') = \bar{v}(\vec{k}, \sigma) u(\vec{k}, \sigma') = 0, \quad (1.5.74)$$

$$u(\vec{k}, \sigma)^\dagger u(\vec{k}, \sigma') = 2E \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad v(\vec{k}, \sigma)^\dagger v(\vec{k}, \sigma') = 2E \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad (1.5.75)$$

$$u(\vec{k}, \sigma)^\dagger v(-\vec{k}, \sigma') = v(\vec{k}, \sigma)^\dagger u(-\vec{k}, \sigma') = 0. \quad (1.5.76)$$

Diese Gleichungen lassen sich unmittelbar mit einfachen Manipulationen mit den Diracmatrizen und den Eigenwertgleichungen $\gamma^0 u(0, \sigma) = u(0, \sigma)$ und $\gamma^0 v(0, \sigma) = -v(0, \sigma)$ herleiten. In der letzten Gleichung (1.5.76) ist es wichtig zu beachten, daß die Dreierimpulse in diesen Formeln zueinander entgegengesetzt gerichtet sein müssen, d.h. das Argument in einer der beiden Funktionen muß $-\vec{k}$ sein!

Zur Berechnung der Antikommutatorrelationen für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren versuchen wir, die Modenentwicklung (1.5.65) nach $\mathbf{a}(\vec{k}, \sigma)$ und $\mathbf{b}^\dagger(\vec{k}, \sigma)$ aufzulösen. Aus der Definition der Feldmoden (1.5.64) folgt

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} u_{\vec{k},+}^*(x) u_{\vec{k}',+}(x) = \frac{1}{2E(\vec{k})} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (1.5.77)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} u_{\vec{k},+}^*(x) u_{\vec{k}',+}^*(x) = \frac{1}{2E(\vec{k})} \exp(2iEt) \delta^{(3)}(\vec{k} + \vec{k}'). \quad (1.5.78)$$

Multiplizieren wir also die Modenentwicklung (1.5.65) mit $u_{\vec{k},+}(x)$ bzw. mit $u_{\vec{k},+}^*(x)$ und wenden (1.5.75) und (1.5.76) an, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\vec{k}, \sigma) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} u^\dagger(\vec{k}, \sigma) u_{\vec{k},+}^*(x) \psi(x), \\ \mathbf{b}(\vec{k}, \sigma) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \psi^\dagger(x) v(\vec{k}, \sigma) u_{\vec{k},+}^*(x). \end{aligned} \quad (1.5.79)$$

Mit Hilfe der Antikommutatorrelationen für die Felder (1.5.62) und der Orthogonalitätsrelationen (1.5.75-1.5.76) erhalten wir daraus die Antikommutatorrelationen für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a}(\vec{k}, \sigma), \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}', \sigma')\} &= \{\mathbf{b}(\vec{k}, \sigma), \mathbf{b}^\dagger(\vec{k}', \sigma')\} = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\sigma, \sigma'}, \\ \{\mathbf{a}(\vec{k}, \sigma), \mathbf{a}(\vec{k}', \sigma')\} &= \{\mathbf{b}(\vec{k}, \sigma), \mathbf{b}(\vec{k}', \sigma')\} = 0, \\ \{\mathbf{a}(\vec{k}, \sigma), \mathbf{b}(\vec{k}', \sigma')\} &= \{\mathbf{a}(\vec{k}, \sigma), \mathbf{b}^\dagger(\vec{k}', \sigma')\} = 0. \end{aligned} \quad (1.5.80)$$

Zur Berechnung des Hamilton-Operators müssen wir, wie oben beim elektromagnetischen Feld, die **Hamilton-Dichte normalordnen**. Dabei ist zu beachten, daß wir diesmal die fermionischen Antikommutatorregeln zu berücksichtigen haben, d.h. es gilt z.B.

$$:\mathbf{a}(\vec{k}, \sigma) \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}', \sigma') := -\mathbf{a}^\dagger(\vec{k}', \sigma') \mathbf{a}(\vec{k}, \sigma), \quad (1.5.81)$$

d.h. der normalgeordnete Ausdruck erhält zusätzlich das Vorzeichen der Permutation, die nötig ist, um die Normalordnung aus der ursprünglichen Operatoranordnung herzustellen.

Für die Lösung der Feldgleichungen lautet die Hamiltondichte gemäß (1.5.59)

$$\mathcal{H} =: \bar{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m)\psi :=: \bar{\psi}(i\gamma^0 \partial_t - i\boldsymbol{\not{D}} + m)\psi(x) :=: \psi^\dagger i\partial_t \psi :. \quad (1.5.82)$$

In diese Gleichung die Modenentwicklung (1.5.65) eingesetzt, über \vec{x} integriert und die Orthogonalitätsbeziehungen (1.5.75-1.5.76) angewandt, liefert dann den **positiv semidefiniten Hamiltonoperator**

$$\mathbf{H} = \int_V d^3 \vec{x} \mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} \sum_{\sigma} E(\vec{k}) \left[\mathbf{n}_a(\vec{k}, \sigma) + \mathbf{n}_b(\vec{k}, \sigma) \right]. \quad (1.5.83)$$

Ebenso findet man den Ladungsoperator gemäß (1.5.56)

$$\mathbf{Q} = \int_V d^3 \vec{x} : \psi^\dagger \psi := \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} \sum_{\sigma} \left[\mathbf{n}_a(\vec{k}, \sigma) - \mathbf{n}_b(\vec{k}, \sigma) \right]. \quad (1.5.84)$$

Man beachte, daß wegen der fermionischen Normalordnungsvorschrift \mathbf{Q} *nicht* positiv definit ist, wie es der hermitesche Ausdruck unter dem Normalordnungssymbol suggeriert. Es ist also wieder nicht die totale Teilchenzahl die Noetherladung der Phaseninvarianz sondern die „Nettoteilchenzahl“, also die Differenz zwischen der Anzahl der Teilchen und der Anzahl der Antiteilchen, ganz analog wie beim geladenen Bosefeld. Die **Besetzungszahloperatoren** sind dabei durch

$$\mathbf{n}_a(\vec{k}, \sigma) = \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}, \sigma)\mathbf{a}(\vec{k}, \sigma), \quad \mathbf{n}_b(\vec{k}, \sigma) = \mathbf{b}^\dagger(\vec{k}, \sigma)\mathbf{b}(\vec{k}, \sigma) \quad (1.5.85)$$

definiert.

Das Energieeigenwertproblem läßt sich wieder wie beim harmonischen Oszillator lösen, nur daß jetzt wegen der Antikommutatorregeln $\mathbf{a}^2(\vec{k}, \sigma) = \mathbf{b}^2(\vec{k}, \sigma) = 0$ gilt, d.h. die Fockbasis ist durch

$$\left| \{n_a(\vec{k}, \sigma)\}, \{n_b(\vec{k}, \sigma)\} \right\rangle = \prod_{\vec{k}, \sigma} [\mathbf{a}^\dagger(\vec{k}, \sigma)]^{n_a(\vec{k}, \sigma)} [\mathbf{b}^\dagger(\vec{k}, \sigma)]^{n_b(\vec{k}, \sigma)} |\Omega\rangle \quad (1.5.86)$$

$$\text{mit } n_a(\vec{k}, \sigma), n_b(\vec{k}, \sigma) \in \{0, 1\}$$

gegeben. Dabei ist $|\Omega\rangle$ wieder der Vakuumzustand, der eindeutig durch

$$\forall \vec{k}, \sigma : \quad \mathbf{a}(\vec{k}, \sigma)|\Omega\rangle = \mathbf{b}(\vec{k}, \sigma)|\Omega\rangle = 0 \quad (1.5.87)$$

definiert ist. Es kann also jeder Einteilchenzustand höchstens von einem Teilchen besetzt sein. Die Antivertauschungsregeln haben somit das **Paulische Ausschließungsprinzip** zur Folge.

1.5.3 Poincaré-Symmetrie der quantisierten Dirac-Theorie

Die Symmetrieanalyse des quantisierten Diracfeldes erfolgt analog wie beim Klein-Gordon-Feld in Abschnitt 1.4.1 bzw. elektromagnetischen Feld in Abschnitt 1.4.2. Wir berechnen zunächst den **kanonischen Energie-Impuls-Tensor** des Diracfeldes zu

$$\Theta^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_a)} \partial_\nu \psi_a - \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\nu \psi - \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu. \quad (1.5.88)$$

Für den Energie- und Impulsoperator erhalten wir in der quantisierten Theorie unter Berücksichtigung der Normalordnungsvorschrift

$$\mathbf{P}_\nu = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} : \Theta^0_\nu := \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} : \psi^\dagger(x) i \partial_\nu \psi(x) :, \quad (1.5.89)$$

wobei wir die Beziehung $\overline{\psi} \gamma^0 = \psi^\dagger$ verwendet haben.

Um die entsprechenden Ausdrücke für die Drehimpuls- und Boostoperatoren zu erhalten, müssen wir die entsprechenden infinitesimalen Transformationen

$$\text{Drehungen: } \delta x^0 = 0, \quad \delta \vec{x} = -\delta \vec{\varphi} \times \vec{x}, \quad \delta \psi = i \delta \vec{\varphi} \cdot \vec{\Sigma} \psi, \quad (1.5.90)$$

$$\text{Boosts: } \delta x^0 = -\delta \vec{\eta} \cdot \vec{x}, \quad \delta \vec{x} = -\delta \vec{\eta} t, \quad \delta \psi = -i \delta \vec{\eta} \cdot \vec{x} \psi, \quad (1.5.91)$$

mit den entsprechenden Erzeugern für die Dirac-Spinordarstellungen für Drehungen und Boosts (1.5.41) bzw. (1.5.30) im allgemeinen kanonischen Noether-Formalismus aus Abschnitt 1.3.6 anwenden, wobei wir hier stets $\Omega_a^\mu = 0$ setzen können). Daraus ergeben sich die gesuchten Drehimpuls- und Boostoperatoren zu

$$\vec{\mathbf{J}} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} : \psi^\dagger(x) \left[\vec{x} \times (-i \vec{\nabla}) + \vec{\Sigma} \right] \psi(x), \quad (1.5.92)$$

$$\vec{\mathbf{K}} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} : \psi^\dagger(x) \left[i \vec{x} \partial_0 + i t \vec{\nabla} + \vec{x} \right] \psi(x). \quad (1.5.93)$$

Beachten wir nun noch, daß der kanonische Feldimpuls durch (1.5.61) gegeben ist, so erhalten wir aus den Antikommutatorregeln für die Felder (1.5.62), daß sich die Dirac-Feldoperatoren unter Lorentz-Transformationen wie die klassischen Felder verhalten, wie es sein muß.

Um dies zu beweisen, betrachten wir zunächst zeitliche und räumliche Translationen. Sie sollten durch den unitären Operator

$$\mathbf{U}_T(a) = \exp(i a \cdot \mathbf{P}) \quad (1.5.94)$$

gegeben sein. Für eine infinitesimale Transformation folgt dann

$$\psi'(x') = \mathbf{U}_T(\delta a) \psi(x') \mathbf{U}_T^\dagger(\delta a) = \psi(x') + i \delta a^\mu \left[\mathbf{P}_\mu, \psi(x') \right] + \mathcal{O}(\delta a^2). \quad (1.5.95)$$

Anwenden der für irgendwelche drei Operatoren \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} geltenden Gleichung

$$[\mathbf{AB}, \mathbf{C}] = \mathbf{A} \{ \mathbf{B}, \mathbf{C} \} - \{ \mathbf{A}, \mathbf{C} \} \mathbf{B} \quad (1.5.96)$$

liefert unter Verwendung von (1.5.89) und den gleichzeitigen Antikommutatorregeln (1.5.62) nach einfacher Rechnung

$$\left[\mathbf{P}_\mu, \psi(x') \right] = -i \partial_\mu \psi(x'). \quad (1.5.97)$$

Von der Theorie des nichtquantisierten Dirac-Feldes erwarten wir nun, daß es sich unter infinitesimalen Translationen gemäß

$$x' = x - \delta a, \quad \psi(x') = \psi(x) = \psi(x' + \delta a) = \psi(x') + \delta a^\mu \partial_\mu \psi(x') \quad (1.5.98)$$

verhält. Der Vergleich mit (1.5.95) zeigt unter Verwendung von (1.5.97), daß dies tatsächlich der Fall ist.

Die Rechnung für Drehungen und Boosts verläuft genau analog. Die unitären Transformationen lauten in diesem Fall¹⁰

$$U_D(\vec{\varphi}) = \exp(-i\vec{\varphi} \cdot \vec{J}), \quad U_B(\vec{\eta}) = \exp(+i\vec{\eta} \cdot \vec{K}), \quad (1.5.99)$$

und die entsprechenden Kommutatorrelationen lauten (*Übung!*)

$$\begin{aligned} [\vec{J}, \psi(x')] &= - [\vec{x}' \times (-i\vec{\nabla}) + \vec{\Sigma}] \psi(x'), \\ [\vec{K}, \psi(x')] &= - [i\vec{x}' \partial_t + it\vec{\nabla} - \vec{x}] \psi(x'). \end{aligned} \quad (1.5.100)$$

Dies führt dann zu dem von den klassischen Feldern her zu erwartenden Verhalten unter infinitesimalen Drehungen bzw. Boosts

$$\begin{aligned} \delta x^0 &= 0, \quad \delta \vec{x} = -\delta \vec{\varphi} \times \vec{x}, \quad \psi'(x') = \left(1 + \delta \vec{\varphi} \times \vec{\nabla} + i\delta \vec{\varphi} \cdot \vec{\Sigma}\right) \psi(x'), \\ \delta x^0 &= -\delta \vec{\eta} \cdot \vec{x}, \quad \delta \vec{x} = -\delta \vec{\eta} x^0, \quad \psi'(x') = \left(1 + \vec{x}' \partial_0 + x'^0 \vec{\nabla} - i\vec{x}'\right) \psi(x'). \end{aligned} \quad (1.5.101)$$

Dies zeigt, daß die quantisierte Dirac-Feldtheorie tatsächlich eine **unitäre Darstellung der Poincaré-Gruppe** liefert. Da sich die Feldoperatoren wie ihre nichtquantisierten Analoga wie lokale Felder unter diesen Transformationen verhalten, haben wir wieder eine **lokale Quantenfeldtheorie** vor uns. Wie wir oben gesehen haben, führte zugleich die Quantisierung als Fermionenfeld gemäß (1.5.83) auch zu einem **positiv semidefiniten Hamiltonoperator**. Lokale Observablen, wie der Energie-Impuls-Tensor¹¹ oder der erhaltene Strom (1.5.52), die durch **bilineare** Ausdrücke in den Feldoperatoren gegeben sind, kommutieren auch stets, wenn die Raumzeit-Argumente raumartigen Abstand haben. Dies folgt unmittelbar aus der Relation (1.5.96) und den Kommutatorregeln zu gleichen Zeiten sowie der soeben nachgewiesenen Lorentzkovarianz dieser Ausdrücke. Da kommutierende Observablen unabhängig voneinander wohldefinierte Werte annehmen können, bedeutet dies, daß Messungen, die auf eine Umgebung in Raum und Zeit beschränkt sind (also sogenannte lokale Messungen), keine Auswirkungen auf andere lokale Messungen, die in einem raumartig dazu gelegenen Raumzeitbereich stattfinden, haben können. Es können also insbesondere auch keine Informationen überlichtschnell ausgetauscht werden, wie es dem relativistischen Kausalitätsprinzip entspricht. Man bezeichnet die Vertauschbarkeit lokaler Observablen auf raumartigen Raumzeitabständen daher auch als **Mikrokausalität**. Die Dirac-Felder ergeben also eine **lokale, mikrokausale Quantenfeldtheorie mit positiv semidefinitem Hamiltonoperator** und besitzt somit eine physikalisch sinnvolle Bedeutung im Sinne der Bornschen Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantentheorie. Dies ist, wie schon mehrfach betont, für eine Einteilcheninterpretation des unquantisierten Dirac-Feldes für den Fall wechselwirkender Teilchen nicht möglich. In der Tat zeigt sich, daß bei relativistischen Streuprozessen neue Teilchen erzeugt und vernichtet werden können, und daher erweist sich die Quantenfeldtheorie als die (bislang einzige) adäquate Beschreibung relativistischer Streuprozesse.

1.5.4 Die diskreten Symmetrietransformationen P , C und T

In diesem Abschnitt betrachten wir die diskreten Symmetrietransformationen der **räumlichen Spiegelung (Parität) P** , der **Ladungskonjugation** (Vertauschen aller Teilchen mit ihren jeweiligen Antiteilchen) C und der **Zeitumkehr oder Zeitspiegelung** für Dirac-Teilchen. Es wird sich herausstellen, daß die **Zeitumkehrtransformation antiunitär** realisiert werden muß.

¹⁰Man beachte die auf Konventionen beruhenden Vorzeichen!

¹¹Streng genommen müßten wir durch Hinzufügen einer geeigneten Viererdivergenz analog zum Vorgehen beim elektromagnetischen Feld den kanonischen Energie-Impuls-Tensor noch symmetrisch unter Vertauschung der Indizes machen, um einen physikalisch sinnvollen Energie-Impuls-Tensor zu erhalten, aber für das jetzige Argument ist dies unerheblich.

Wir bemerken noch, daß die schwache Wechselwirkung die einzelnen Symmetrietransformationen C , P und T ebenso wie die kombinierte Transformation CP verletzt. Allerdings kann man zeigen, daß jede lokale, mikrokausale Quantenfeldtheorie mit stabilem Grundzustand invariant unter der kombinierten Transformation CPT sein muß. Bislang gibt es keine Hinweise einer Verletzung dieser CPT -Invarianz. Der Beweis geht auf Pauli und Lüders zurück (für eine ausführliche Darstellung vgl. [SW64]).

Raumspiegelungen

Nach dem Wigner-Theorem muß bei **diskreten Symmetrietransformationen** untersucht werden, ob die Transformationen als unitärer oder antiunitärer Operator realisiert werden müssen. Dies läßt sich am einfachsten an der **Heisenbergalgebra** von Orts- und Impulsoperatoren untersuchen. Da wir uns hier nur mit massiven oder masselosen Diraceteilchen beschäftigen, ist dies auch im relativistischen Kontext unproblematisch, da für solche Felder sowohl Orts- als auch Impulsoperator existieren, die die Heisenberg-Kommutatorrelationen erfüllen.

Die Raumspiegelung sollte folgendermaßen auf Orts- und Impulsoperatoren operieren:

$$\vec{x}' = \mathbf{U}(P)\vec{x}\mathbf{U}^\dagger(P) = -\vec{x}, \quad \vec{p}' = \mathbf{U}(P)\vec{p}\mathbf{U}^\dagger(P) = -\vec{p}. \quad (1.5.102)$$

Die Kommutatorrelationen transformieren sich gemäß

$$[\mathbf{x}'_i, \mathbf{p}'_j] = [-\mathbf{x}_i, -\mathbf{p}_j] = [\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_j] \stackrel{!}{=} i\delta_{ij}. \quad (1.5.103)$$

Andererseits muß sich dies aus der kanonischen Kommutatorrelation für \mathbf{x} und \mathbf{p} durch die Ähnlichkeitstransformation mit $\mathbf{U}(P)$ ergeben:

$$[\mathbf{x}'_i, \mathbf{p}'_j] = \mathbf{U}(P) [\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_j] \mathbf{U}^\dagger(P) = \mathbf{U}(P) i\delta_{ij} \mathbf{U}^\dagger(P) = \pm i\delta_{ij}, \quad (1.5.104)$$

wobei das obere Vorzeichen für einen unitären, das untere für einen antiunitären Operator gilt. Es muß also die Raumspiegeltransformation notwendig durch einen **unitären Operator** dargestellt werden.

Der **Diracspinoroperator** sollte sich unter der Paritätstransformation gemäß

$$\psi_p(t, \vec{x}) = \mathbf{U}(P)\psi(t, \vec{x})\mathbf{U}^\dagger(P) = \eta_p \hat{S}(P)\psi(t, -\vec{x}) \quad (1.5.105)$$

transformieren. Dabei ist $\hat{S}(P)$ eine Spinortransformationsmatrix, die $\hat{S}^2(P) = \mathbf{1}$ erfüllt und η_p ein Phasenfaktor. Da $\mathbf{U}(P)$ unitär ist, muß für ψ_p die Diracgleichung gelten, d.h. es muß

$$\hat{S}^{-1}(P)(i\hat{\mathcal{D}} - M)\hat{S}(P)\psi(t, -\vec{x}) = \hat{S}^{-1}(P)(i\gamma^0\partial_t - i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - m)\hat{S}(P)\psi(t, -\vec{x}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.5.106)$$

sein. Für den Operator ψ gilt voraussetzungsgemäß die Diracgleichung

$$(i\hat{\mathcal{D}} - m)\psi = (i\gamma^0\partial_t + i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - m)\psi = 0. \quad (1.5.107)$$

Daraus folgt nun aber (1.5.106), wenn

$$\hat{S}^{-1}(P)\gamma^0\hat{S}(P) = \gamma^0, \quad \hat{S}^{-1}(P)\vec{\gamma}\hat{S}(P) = -\vec{\gamma} \quad \text{bzw.} \quad \hat{S}^{-1}(P)\gamma^\mu\hat{S}(P) = P^\mu{}_\nu\gamma^\nu \quad (1.5.108)$$

gilt. Dabei ist $(P^\mu{}_\nu) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Es ist klar, daß aufgrund der Antikommutatorrelationen der γ -Matrizen,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}, \quad (1.5.109)$$

die Matrix

$$\hat{S}(P) = \hat{S}^{-1}(P) = \gamma^0 \quad (1.5.110)$$

sein muß. Man rechnet auch leicht explizit nach, daß diese Matrix tatsächlich (1.5.109) erfüllt.

Ladungskonjugation

Die Ladungskonjugationstransformation C soll Teilchen und Antiteilchen vertauschen. Da ψ Teilchen vernichtet und Antiteilchen erzeugt, muß ψ_C umgekehrt Antiteilchen vernichten und Teilchen erzeugen. Dies ist aber auch für den Operator $\bar{\psi}^t$ der Fall. Dabei steht das hochgestellte t für Transposition im Spinorraum. Die Ladungskonjugationsoperation vertauscht mit Orts- und Impulsoperator, woraus aus den Heisenbergschen Vertauschungsrelationen auf analoge Weise wie oben beim Raumspiegelungsoperator folgt, daß sie **unitär** realisiert werden muß. Es ist also

$$\psi_C(t, \vec{x}) = \mathbf{U}(C)\psi(t, \vec{x})\mathbf{U}^\dagger(C) = \eta_C \hat{S}(C) \bar{\psi}^t(t, \vec{x}). \quad (1.5.111)$$

Da $\mathbf{U}(C)$ unitär ist, muß für ψ_C wie für ψ die Diracgleichung gelten, d.h.

$$\hat{S}^{-1}(C)(i\hat{\mathcal{D}} - m)\hat{S}(C)\bar{\psi}^t(t, \vec{x}) \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.5.112)$$

Andererseits gilt für den Dirac-adjungierten Operator

$$\overleftarrow{\bar{\psi}(t, \vec{x})(i\hat{\mathcal{D}} + m)} = 0, \quad (1.5.113)$$

und durch Transponieren bzgl. des Spinorraums folgt daraus

$$(i\hat{\mathcal{D}}^t + m)\bar{\psi}^t(t, \vec{x}) = 0. \quad (1.5.114)$$

Der Vergleich von (1.5.112) mit (1.5.114) zeigt, daß die Matrix $\hat{S}(C)$ die Gleichung

$$S^{-1}(C)\gamma^\mu \hat{S}(C) = -(\gamma^\mu)^t \quad (1.5.115)$$

erfüllen muß. In unserer Darstellung der Dirac-Matrizen (1.5.6) gilt

$$(\gamma^\mu)^t = (-1)^\mu \gamma^\mu, \quad (1.5.116)$$

und wie man leicht nachrechnet, erfüllt

$$\hat{S}(C) = i\gamma^2 \gamma^0, \quad \hat{S}^{-1}(C) = i\gamma^0 \gamma^2 = -\hat{S}(C) \quad (1.5.117)$$

die Relationen (1.5.115).

Zeitumkehr

Die Zeitumkehrtransformation muß wie folgt auf Orts- und Impulsoperatoren wirken:

$$\mathbf{U}(T)\vec{x}\mathbf{U}^\dagger(T) = \vec{x}, \quad \mathbf{U}(T)\vec{p}\mathbf{U}^\dagger(T) = -\vec{p}. \quad (1.5.118)$$

Eine analoge Rechnung wie oben beim Paritätsoperator ergibt, daß die **Zeitumkehrtransformation antiunitär** zu repräsentieren ist. Da ein antiunitärer Operator mit einer Adjunktion der ähnlichkeits-transformierten Operatoren einhergeht, muß die Wirkung der Zeitumkehrtransformation auf den Dirac-Feldoperator durch

$$\psi_T(t, \vec{x}) = \mathbf{U}(T)\psi(t, \vec{x})\mathbf{U}^\dagger(T) = \eta_T \hat{S}(T) \bar{\psi}^t(-t, \vec{x}) \quad (1.5.119)$$

gegeben sein. Aus der Gültigkeit der Diracgleichung für $\psi(t, \vec{x})$ folgt wegen der Antiunitarität von $U(T)$

$$(-i\vec{d}^* - m)\psi_T(t, \vec{x}) = 0. \quad (1.5.120)$$

Dies in (1.5.119) eingesetzt, liefert die Bedingung

$$\hat{S}^{-1}(T)(i\vec{d}^* + m)\hat{S}(T)\bar{\psi}^t(-t, \vec{x}) = 0. \quad (1.5.121)$$

Ein Vergleich mit (1.5.114) ergibt, daß

$$\hat{S}^{-1}(T)(\gamma^0)^* \hat{S}(T) = -(\gamma^0)^t, \quad \hat{S}^{-1}(T)\vec{\gamma}^* \hat{S}(T) = \vec{\gamma}^t \Leftrightarrow \hat{S}^{-1}(T)(\gamma^\mu)^* \hat{S}(T) = T^\mu{}_\nu (\gamma^\nu)^t \quad (1.5.122)$$

mit der Zeitumkehrmatrix $(T^\mu{}_\nu) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. In unserer Darstellung der Diracmatrizen (1.5.6) sind γ^0, γ^1 und γ^3 reell und γ^2 rein imaginär. Zusammen mit (1.5.116) folgt dann aus (1.5.122)

$$\hat{S}^{-1}(T)\gamma^\mu \hat{S}(T) = -\gamma^\mu. \quad (1.5.123)$$

Es ist sofort klar, daß

$$\hat{S}(T) = \hat{S}^{-1}(T) = \gamma^5 \quad (1.5.124)$$

mit

$$\gamma^5 = \gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (1.5.125)$$

diese Gleichung erfüllt.

Alternativ können wir aber wegen (1.5.111) auch

$$\psi_T(t, \vec{x}) = \eta_T \eta_C^* \hat{S}(T) \hat{S}^{-1}(C) \psi_C(-t, \vec{x}) \quad (1.5.126)$$

schreiben. Da sich ψ_C von ψ nur um eine unitäre Transformation unterscheidet, können wir die Zeitumkehrtransformation auch mit dem Ansatz

$$\psi_T(t, \vec{x}) = \eta'_T \hat{S}'(T) \psi(t, \vec{x}) \quad (1.5.127)$$

realisieren. Offenbar ist bis auf eine Phase η

$$\hat{S}'(T) = \eta \hat{S}(T) \hat{S}^{-1}(C) = \eta \gamma_5 i \gamma^0 \gamma^2 = \eta \gamma^1 \gamma^3. \quad (1.5.128)$$

Die Standardwahl der Phase ist $\eta = i$, d.h.

$$\hat{S}'(T) = i\gamma^1\gamma^3 = \hat{S}'^{-1}(T). \quad (1.5.129)$$

Setzt man (1.5.127) in die Bewegungsgleichung (1.5.120) des Operators $\psi_T(t, \vec{x})$ ein, erhalten wir durch Vergleich mit der Diracgleichung, die voraussetzungsgemäß für $\psi(t, \vec{x})$ gilt, die Bedingungen

$$\hat{S}'^{-1}(T)(\gamma^0)^* \hat{S}'(T) = \gamma^0, \quad \hat{S}'^{-1}(T)\vec{\gamma}^* \hat{S}'(T) = -\vec{\gamma}. \quad (1.5.130)$$

In der Dirac-Darstellung und der chiralen Darstellung der Diracmatrizen sind γ^0, γ^1 und γ^3 reell und γ^2 rein imaginär, d.h. wir können (1.5.130) in der Form

$$\hat{S}'^{-1}(T)\gamma^\mu \hat{S}'(T) = (-1)^\mu \gamma^\mu = (\gamma^\mu)^t. \quad (1.5.131)$$

schreiben. Man weist durch direkte Rechnung nach, daß (1.5.129) in der Tat diese Bedingungen erfüllt. Alternativ können wir auch das konjugiert Komplexe von (1.5.130) bilden. Wegen $[\hat{S}'(T)]^* = -\hat{S}'(T)$ ergibt sich für diese Beziehungen dann die Form

$$\hat{S}'^{-1}(T)\gamma^0 \hat{S}'(T) = (\gamma^0)^*, \quad \hat{S}'^{-1}(T)\vec{\gamma} \hat{S}'(T) = -\vec{\gamma}^* \Rightarrow \hat{S}'^{-1}(T)\gamma^\mu \hat{S}'(T) = P^\mu{}_\nu (\gamma^\nu)^* \quad (1.5.132)$$

mit dem Raumspiegelungsoperator $(P^\mu{}_\nu) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Sesquilinearformen der Diracfelder

Für die Modellbildung für **Wechselwirkungen** sind die Kombinationen $\bar{\psi}\Gamma\psi$ wichtig, wobei Γ irgendwelche 4×4 -Matrizen sein können. Solche bilinearen Formen können nämlich in der Wechselwirkungslagrangedichte mit anderen Feldern geeigneten Wechselwirkungstermen zusammengesetzt werden. Dabei ist aber noch die relativistische Invarianz, also die Invarianz unter eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen sowie evtl. unter den oben besprochenen diskreten Transformationen wichtig.

Aus dem in Abschnitt 1.5.3 besprochenen Transformationsverhalten der Feldoperatoren und wegen (1.5.13) folgt sofort, daß

$$S = \bar{\psi}\psi \quad (1.5.133)$$

ein **Skalarfeld** unter eigentlich orthochronen Lorentztransformationen ist. Wegen (1.5.110) ist es auch ein Skalarfeld bzgl. Raumspiegelungen.

Ebenso ist

$$V^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (1.5.134)$$

ein Vektorfeld sowohl unter eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen als auch unter Raumspiegelungen. Man spricht in diesem Zusammenhang genauer von einem **polaren Vektor**.

Aus den Diracmatrizen läßt sich die Matrix

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (1.5.135)$$

bilden. Aus der zweiten Form können wir vermuten, daß sie sich wie ein Skalar unter eigentlich orthochronen Lorentztransformationen verhält, was sofort aus der Transformationseigenschaft der Dirac-Matrizen und $\det \Lambda = 1$ für $\Lambda \in \text{SO}(1,3)^\uparrow$ folgt. Unter Raumspiegelungen wechselt der Ausdruck allerdings sein Vorzeichen, denn es ist offenbar $\det \mathcal{P} = -1$. Folglich ist der Ausdruck

$$P = \bar{\psi}\gamma^5\psi \quad (1.5.136)$$

ein **pseudoskalares Feld**.

Ebenso ist

$$A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \quad (1.5.137)$$

ein **Axialvektorfeld**, d.h. es transformiert sich unter eigentlich orthochronen Lorentztransformationen wie ein Vektorfeld, aber unter Raumspiegelungen mit einem zusätzlichen Vorzeichen, d.h. es gilt

$$\begin{pmatrix} A^0(t, \vec{x}) \\ \vec{A}(t, \vec{x}) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} -A^0(t, -\vec{x}) \\ +\vec{A}(t, -\vec{x}) \end{pmatrix}. \quad (1.5.138)$$

Schließlich ist noch

$$S^{\mu\nu} = \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \quad \text{mit} \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (1.5.139)$$

ein **antisymmetrisches Tensorfeld** zweiter Stufe.

Da die fünf Matrizen

$$1_4, \quad \gamma^5, \quad \gamma^\mu, \quad \gamma^\mu\gamma^5, \quad \sigma^{\mu\nu} \quad (1.5.140)$$

linear unabhängig sind (*Übung!*) und insgesamt $1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 16$ Matrizen vorliegen, kann man alle anderen möglichen Sesquilinearformen, die man aus dem Dirac-Spinor bilden kann, aus den oben definierten Formen durch Linearkombination zusammensetzen. Die Feldoperatoren S , V^μ , A^μ und $T^{\mu\nu}$ sind zudem noch **selbstadjungiert** (*Übung!*).

Literaturverzeichnis

- [A⁺08] C. Amsler, et al., Review of particle physics, Phys. Lett. B **667** (2008) 1.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2008.07.018>
- [Ble50] K. Bleuler, Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen, Helv. Phys. Acta **23** (1950) 567.
<http://dx.doi.org/10.5169/seals-112124>
- [Gup50] S. N. Gupta, Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics, Proc. Phys. Soc. A **63** (1950) 681.
<http://dx.doi.org/10.1088/0370-1298/63/7/301>
- [Hee08] H. van Hees, Klassische Mechanik (2008).
<http://theory.gsi.de/~vanhees/faq-pdf/mech.pdf>
- [JO01] J. Jackson, L. Okun, Historical roots of gauge invariance, Reviews of Modern Physics **73** (2001) 663.
<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.73.663>
- [Noe18] E. Noether, Invariante Variationsprobleme, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1918) 235.
<http://dx.doi.org/10.1080/00411457108231446>
- [PS95] M. Peskin, D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Addison-Wesley Publ. Comp. (1995).
- [SW64] R. Streater, A. S. Wightman, Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie, Bibliographisches Institut, Mannheim (1964).