

# Quantenradierer

Hendrik van Hees\*  
Institut für Theoretische Physik  
Justus-Liebig-Universität Gießen  
D-35392 Gießen  
Germany

08. Dezember 2009

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Ein idealisierter Doppelspaltversuch</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Gewinnung von Welcher-Weg-Information</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Quantenradieren der Welcher-Weg-Information</b>	<b>7</b>
4.1	Maximal verschränkte Photonenpaare . . . . .	8
4.2	Der Quantenradierer . . . . .	9
<b>A</b>	<b>Zur Theorie des <math>\lambda/4</math>-Plättchens</b>	<b>12</b>

## 1 Einleitung

Im folgenden will ich versuchen, ein Grundlagenexperiment [WTPM02] zur Quantentheorie im Rahmen der „minimalen Interpretation“ zu erklären. Das Besondere an dieser Art von Experimenten ist gerade, daß nur die einfachsten Grundkonzepte der Quantentheorie notwendig sind, um ihr Prinzip zu verstehen. Sie sind in Gestalt von „Gedankenexperimenten“ schon seit Jahrzehnten bekannt, insbesondere in den berühmten Debatten zwischen Bohr und Einstein [EPR35, Boh35], die bekanntlich in der Erfindung des „EPR-Paradoxons“ ihren Höhepunkt gefunden haben.

Wir benötigen im folgenden nur einfachste Rechnungen mit diskreten Observablen, um quantentheoretisch zu verstehen, was bei diesem Experiment geschieht. Dabei werden gleichzeitig Extremfälle nichtklassischen Verhaltens quantenmechanischer Systeme überprüft, und das macht

---

\*<mailto:Hendrik.vanHees@theo.physik.uni-giessen.de>

diese Experimente so interessant, nicht zuletzt auch in didaktischer Hinsicht, denn sie dürften wohl in den Physikleistungskursen unserer Schulen durchaus vermittelbar sein.

Welche quantenmechanischen Grundlagen benötigen wir also? Zunächst müssen wir uns daran erinnern, daß quantenmechanische (reine) Zustände durch Vektoren  $|\psi\rangle$  in einem abstrakten Hilbertraum beschrieben werden, die zu 1 normiert sind:  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ <sup>1</sup>.

Die physikalische Bedeutung der Zustände, also die (minimale) Interpretation der Quantentheorie, die man benötigt, um sie auf reale Systeme anzuwenden, lautet, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein im Zustand  $|\psi\rangle$  präpariertes System, in einem anderen Zustand  $|\phi\rangle$  vorgefunden wird,

$$P(\phi|\psi) = |\langle\phi|\psi\rangle|^2 \quad (1)$$

ist.

Observablen werden durch selbstadjungierte Operatoren, die im Hilbertraum der Zustände operieren, beschrieben, und einer Observablen kommt genau dann ein scharfer Wert zu, wenn das System in einem Eigenzustand des die Observablen repräsentierenden Operators präpariert ist. Man mißt dann mit Sicherheit den dazugehörigen Eigenwert des Operators. Die Eigenwerte des Operators sind die einzig möglichen Meßwerte der durch ihn beschriebenen Observablen.

Um scheinbare intrinsische Widersprüche („Paradoxa“) zu vermeiden, muß man sich dabei klar machen, daß außer in dem speziellen Fall, daß ein System im Eigenzustand einer gerade zu vermessenden Observable vorliegt, nur Wahrscheinlichkeitsaussagen möglich sind, da der Zustandsbegriff über Wahrscheinlichkeiten definiert ist, d.h. die Aussagen der Quantentheorie beziehen sich stets auf *Ensembles gleichartig präparierter Einzelsysteme*, nicht auf ein einzelnes System. Einer Observablen eines einzelnen Systems kommt nur dann ein bestimmter Wert zu, wenn es in einem Eigenzustand des dazugehörigen selbstadjungierten Operators präpariert ist. Daß eine solche Präparation vorliegt, kann man freilich wieder nur am Ensemble nachweisen, indem man an jedem Einzelsystem desselben die Observable mißt und stets denselben Wert, eben den Eigenwert des entsprechenden Operators findet<sup>2</sup>

Schließlich müssen wir noch wissen, welche Zustände ein Photon, also ein Feldquant des elektromagnetischen Feldes, annehmen kann. Ich will hier nun nicht die recht komplizierte Darstellungstheorie der Poincarégruppe, die man etwa in [Wei95, Hee02] finden kann, bemühen, sondern mehr heuristisch argumentieren.

Wir müssen uns dazu nur von der klassischen Elektrodynamik her erinnern, daß das elektromagnetische Feld ein Vektorfeld ist, das der Wellengleichung genügt. Betrachten wir z.B.  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  als das elektromagnetische Feld. Das hat den Vorteil, daß wir mit beobachtbaren und folglich eichinvarianten Größen operieren. In unserem Falle ist dies legitim, weil wir nur mit freien Photonen operieren müssen, da wir die Wechselwirkungen derselben mit Ladungen nicht explizit zu betrachten brauchen. Es sei hier der Vollständigkeit halber nur erwähnt, daß man in der QED das Viererpotential einführen muß, um die den Erfahrungstatsachen entsprechende „minimale Kopplung“ des Photonenfeldes an geladene Materieteilchen (z.B. Elektronen oder geladene

<sup>1</sup>Ich sehe hier absichtlich vereinfachend davon ab, daß i.a. ein reiner Zustand durch einen Strahl im Hilbertraum bzw. dazu äquivalent einen Projektionsoperator  $|\psi\rangle\langle\psi|$  gegeben ist, weil wir dies im folgenden nicht benötigen werden.

<sup>2</sup>Wir gehen hier nicht auf den Fall ein, daß eine Observable entartet sein kann, d.h. daß mehrere orthogonale Eigenzustände der Observable existieren können, die denselben Eigenwert besitzen. In diesem Falle denken wir uns einfach einen maximalen kompatiblen Satz von Observablen präpariert vor, so daß sich das System in einem eindeutig bestimmten Eigenzustand der zu vermessenden Observable befindet.

Pionen etc.) zu beschreiben.

Betrachten wir also  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  im Vakuum, müssen wir uns nur erinnern, daß die ebenen Wellen entsprechenden Lösungen der ladungs- und stromfreien Maxwellgleichungen transversal sind, d.h.  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle gerichtet (und stehen ihrerseits senkrecht zueinander). Wellenvektor und Kreisfrequenz stehen in der Beziehung

$$\omega^2 = \vec{k}^2 c^2 \quad (2)$$

zueinander, was aus der Tatsache folgt, daß die Felder der Wellengleichung genügen. Zu jedem vorgegebenen Wellenvektor  $\vec{k}$  lassen sich dann alle Felder durch Superposition aus zwei Polarisationsrichtungen (definitionsgemäß die Richtung des elektrischen Feldes) gewinnen. Allgemeine Felder lassen sich durch Fourierdarstellung aus diesen Feldern zusammensetzen.

Besonders geeignet ist dabei auch die Helizitätsbasis. Zu jedem  $\vec{k}$  wählt man dann zirkular polarisierte Wellen. Dabei gibt es eine links- und eine rechtszirkular polarisierte Welle.

Wir wählen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\vec{k} = k\hat{z}$ . Dann ist eine links- (oberes Vorzeichen) bzw. rechts-zirkular (unteres Vorzeichen) polarisierte ebene Welle durch

$$\vec{E} \propto \text{Re}[(\hat{x} \pm i\hat{y}) \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{x})] \quad (3)$$

gegeben.

Betrachtet man nun die Theorie des quantisierten Feldes, also Photonen, kann man eine vollständige Basis des Hilbertraums als den verallgemeinerten Zuständen, die diesen ebenen Wellen als Moden entsprechen, verwenden. Dies entspricht Photonen mit einem bestimmten Impuls und einer bestimmten Helizität, wobei die Helizität als die Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung aufgefaßt werden kann, d.h. rechts- bzw. linkszirkular polarisierte Photonen sind solche, bei denen der Spin in Richtung bzw. entgegengesetzt zur Richtung des Impulses präpariert ist. Die Helizität ist eine diskrete Observable, die genau die Werte  $\pm 1$  entsprechend rechts- und linkszirkular polarisierten Lichtes annehmen kann.

Genaugogut können wir freilich auch linear polarisierte Photonen als Basiszustände verwenden, und das wird weiter unten noch eine wichtige Rolle spielen.

Damit sind wir schon vollends gerüstet, um das Quantenradiererexperiment, das wir im folgenden beschreiben wollen, zu verstehen.

Im folgenden betrachten wir nacheinander den Doppelspalt, den Doppelspalt unter Gewinnung von „Welcher-Weg-Information“ und schließlich das eigentliche Quantenradiererexperiment.

## 2 Ein idealisierter Doppelspaltversuch

Wir betrachten zunächst das altbekannte Doppelspaltexperiment von Young, mit dem die Wellennatur des Lichtes experimentell bestätigt wurde, aus quantentheoretischer Sicht.

Dazu betrachten wir eine Lichtquelle, die in guter Näherung als „Einphotonenquelle“ behandelt werden kann, d.h. wir nehmen an, wir hätten eine Quelle, die beliebig oft in der Lage ist, ein in der Richtung  $\hat{x}$  polarisiertes Photon einer bestimmten Frequenz abzugeben.

Diese in guter Näherung als ebene Wellen zu beschreibenden Photonen fallen nun auf einen Schirm mit zwei Öffnungen im Abstand  $d$ . Der Einfachheit halber nehmen wir auch an, die

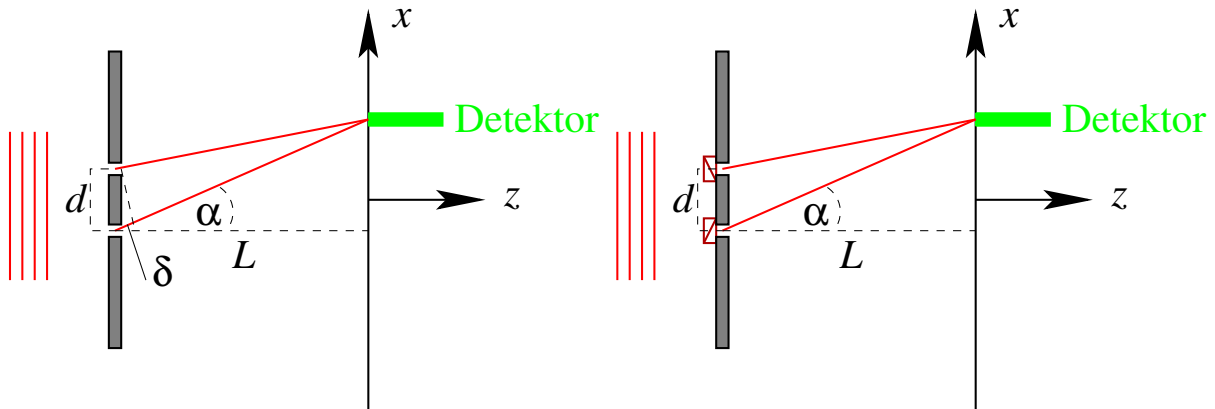


Abbildung 1: Links: Der Youngsche Doppelspaltversuch zum Nachweis der Wellennatur von Licht. Rechts: Der Youngsche Doppelspaltversuch mit Photonen, über die wir prinzipiell „Welcher-Weg-Information“ besitzen.

Spaltöffnungen selbst seien klein gegen die Wellenlänge des Lichtes, so daß wir sie als punktförmige Quellen ansehen können. Die Photonen werden dann in einem Abstand  $L$  vom Doppelspalt auf einer Photoplatte oder mit Hilfe eines Photomultipliers registriert (s. Abb. 1). Im folgenden nennen wir diese Registriervorrichtung der Einfachheit halber einfach „Schirm“.

Aus der Zeichnung lesen wir ab, daß die Wahrscheinlichkeit, am Punkt  $x$ , wo sich der Detektor befindet, ein Photon zu finden,

$$P = N|1 + \exp[i\varphi(x)]|^2 = 2N\{1 + \cos[\varphi(x)]\} \quad (4)$$

sein muß, denn nach den Grundprinzipien der Quantentheorie addieren sich die Wahrscheinlichkeitsamplituden für die beiden Möglichkeiten kohäherent. Dabei ist  $N$  eine willkürlich zu wählende Normierungskonstante. Die Phase  $\varphi$  ergibt sich aus dem Wegunterschied  $\delta$  zwischen den beiden eingezeichneten Wegen. Mit ein wenig elementarer Geometrie und unter der Annahme, daß  $x \ll L$  und also  $\sin \alpha \approx \tan \alpha$  ist, finden wir

$$\frac{\delta}{d} = \sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{x}{L} \Rightarrow \delta = \frac{xd}{L}, \quad (5)$$

und damit ergibt sich für die Phase

$$\varphi(x) = 2\pi \frac{xd}{L\lambda}. \quad (6)$$

Es ergibt sich also ein Interferenzmuster mit Maxima und Minima für diejenigen  $x$ , für die

$$\begin{aligned} \frac{x_{\max}d}{L\lambda} &= n \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \\ \frac{x_{\min}d}{L\lambda} &= n + \frac{1}{2} \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (7)$$

ist. Es ist klar, daß ein einzelnes Photon für sich genommen kein Interferenzmuster erzeugt. Es tritt entweder in den Detektor und wird registriert oder nicht, und wir können für ein bestimmtes Photon nicht vorhersagen, ob es im Detektor registriert wird oder nicht. Wir können

den Nachweis, daß die Wahrscheinlichkeit, daß das Photon bei  $x$  auftrifft, gerade durch (4) gegeben ist, nur dadurch überprüfen, daß wir den Versuch möglichst oft wiederholen, wobei wir lediglich sicherzustellen haben, daß wir immer gleichartig präparierte Photonen verwenden. Der quantenmechanische Zustand beschreibt also nicht einzelne Photonen, sondern *das statistische Verhalten eines Ensembles voneinander unabhängiger gleichartig präparierter Photonen*.

Es ist wichtig zu bemerken, daß das Interferenzmuster dadurch zustandekommt, daß wir die *Wahrscheinlichkeitsamplituden* und nicht die Wahrscheinlichkeiten der Photonen addieren. Diese Vorschrift ist gemäß den Grundprinzipien der Quantentheorie stets anzuwenden. Weiter ist noch wichtig, daß sich in unserem Beispiel die Photonen, die durch den einen Spalt laufen, durch nichts von den Photonen, die durch den anderen Spalt kommen, unterscheiden. Wir können also nicht sagen, durch welchen Spalt ein bestimmtes Photon gekommen ist.

Im Wellenbild ist das selbstverständlich: Wir müssen Licht verwenden, das kohärent über einen räumlich so großen Bereich ausgedehnt ist, daß sie mit beiden Spaltöffnungen überlappen. Im quantentheoretischen Photonenbild bedeutet dies, daß die Ortsunschärfe entsprechend groß sein muß, d.h. wir können aufgrund des Versuchsaufbaus nicht wissen, durch welchen Spalt ein Photon gehen wird.

### 3 Gewinnung von Welcher-Weg-Information

Jetzt ändern wir den Versuch ab, indem wir die Photonen selbst verwenden, um zu markieren, durch welchen Spalt sie gekommen sind.

Wir nehmen wieder an, daß wie zuvor die Photonen in  $\hat{x}$ -Richtung polarisiert sind und durch ebene Wellen bestimmter Frequenz beschrieben werden können. Jetzt befestigen wir aber vor den Spalten sogenannte  $\lambda/4$ -Plättchen.

Diese nutzen den Effekt anisotroper Materialien aus, daß es ausgezeichnete zueinander senkrecht stehende Richtungen<sup>3</sup>, die sogenannten optischen Hauptachsen dieses Materials gibt, so daß Licht, das entlang einer dieser Achsen einfällt, unterschiedliche Phasengeschwindigkeit besitzt, je nachdem ob es in der einen oder anderen Richtung (senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle) polarisiert ist. Man spricht entsprechend auch von der „schnellen“ bzw. „langsamen“ Achse des Kristalls. Das  $\lambda/4$ -Plättchen ist gerade so geschnitten, daß die eine optische Hauptachse senkrecht zur Schnittfläche steht.

Zum Verständnis des Experiments brauchen wir nur zu wissen, daß linear polarisierte Photonen, die das  $\lambda/4$ -Plättchen durchlaufen, je nach Winkelstellung der optischen Hauptachsen des elektrisch anisotropen Materials relativ zur Polarisationsrichtung durch den Phasenunterschied der Polarisationsanteile aufgrund der unterschiedlichen Phasengeschwindigkeit derselben *elliptisch polarisiert* werden. Hier befestigen wir je ein  $\lambda/4$ -Plättchen in den Spalten, so daß ihre „schnelle Achse“ im Winkel von  $45^\circ$  bzw.  $-45^\circ$  zur  $x$ -Richtung stehen. Dadurch entsteht aus den in  $x$ -Richtung polarisierten Photonen, die durch Spalt 1 (Spalt 2) laufen, linkszirkular (rechtszirkular) polarisierte Photonen.

Bezeichnen wir mit  $|\hat{x}\rangle$  und  $|\hat{y}\rangle$  die Polarisationszustände für in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung polarisierte

---

<sup>3</sup>Dies sind die Hauptachsen des Dielektrizitätstensors des entsprechenden Materials.

Photonen, dann bezeichnen

$$\begin{aligned} |L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{x}\rangle + i|\hat{y}\rangle), \\ |R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{x}\rangle - i|\hat{y}\rangle) \end{aligned} \quad (8)$$

die Polarisationszustände links- bzw. rechtszirkular polarisierter Photonen.

Wir bemerken noch für später, daß wir die Wirkung eines  $\lambda/4$ -Plättchens in diesen beiden Orientierungen durch die unitären Operatoren

$$\mathbf{Q}_+ = |L\rangle\langle\hat{x}| + i|R\rangle\langle\hat{y}|, \quad \mathbf{Q}_- = |R\rangle\langle\hat{x}| - i|L\rangle\langle\hat{y}|, \quad (9)$$

beschreiben können. Dabei haben wir eine bequeme Phasenwahl getroffen.

Da  $|\hat{x}\rangle$  und  $|\hat{y}\rangle$  ein Orthonormalsystem im Raum der Polarisationszustände bilden, ist dies auch für  $|L\rangle$  und  $|R\rangle$  der Fall.

Durch diese Anordnung der  $\lambda/4$ -Plättchen sind aber nun Photonen, die durch Spalt 1 gelaufen sind, von Photonen, die durch Spalt 2 gelaufen sind, wohl unterscheidbar: Man muß hinter dem Doppelspalt nur messen, ob das Photon links- oder rechtszirkular polarisiert ist, um zu wissen, ob es durch Spalt 1 oder Spalt 2 gelaufen ist.

Wir können aber auch ausrechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Photonen nun einen bei  $x$  aufgestellten Detektor ansprechen lassen. Wir müssen jetzt den Zustand nur etwas ausführlicher hinschreiben, indem wir die unterschiedliche Polarisationsrichtung berücksichtigen:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|L\rangle + \exp[i\varphi(x)]|R\rangle]. \quad (10)$$

Auch hier haben wir die Wahrscheinlichkeitsamplituden addiert. Da aber nun die Polarisationszustände für die durch die verschiedenen Spalten gelaufenen Photonen zueinander senkrecht stehen, entsteht keine Interferenz:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1/2\{\langle L|L\rangle + \langle R|R\rangle + \exp[i\varphi(x)]\langle L|R\rangle + \exp[-i\varphi(x)]\langle R|L\rangle\} = 1. \quad (11)$$

Das bedeutet, daß wir mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein Photon an jedem Ort  $x$  antreffen werden, d.h. wir finden kein Interferenzmuster mehr, wenn wir viele solche Photonen durch die Anordnung schicken.

Es ist dabei vollkommen ausreichend, daß die „Welcher-Weg-Information“ prinzipiell durch Messung der Polarisation des Photons jenseits des Doppelspaltens bestimmbar ist. Wir müssen diese Messung nicht wirklich ausführen, um das Interferenzmuster zum Verschwinden zu bringen. Allerdings kommt nun jedem Photon durch die Markierung über den Polarisationszustand mit Sicherheit das Attribut zu, durch welchen Spalt es gelaufen ist.

In dem ursprünglichen Experiment ohne  $\lambda/4$ -Plättchen war es prinzipiell nicht möglich, durch irgendwelche Messungen in Erfahrung zu bringen, ob ein bestimmtes Photon, das bei  $x$  den Detektor trifft, durch Spalt 1 oder durch Spalt 2 dorthin gelangt war. In diesem Falle überlagern sich also die beiden Möglichkeiten *kohärent*, während im abgeänderten Experiment durch die Einführung der  $\lambda/4$ -Plättchen sichergestellt war, daß prinzipiell von jedem Photon bekannt ist, durch welchen Spalt es gelaufen ist. Das Interferenzmuster verschwindet dann, weil sich die

beiden Möglichkeiten, zum Detektor zu gelangen, aufgrund der Orthogonalität der die Welcher-Weginformation encodierenden Polarisationszustände *inkohärent* addieren.

Durch die Orthogonalität der Zustände ist sichergestellt, daß wir mit 100% Gewißheit in Erfahrung bringen können, durch welchen Spalt jedes Photon gelaufen ist. Wir können freilich mit Hilfe der  $\lambda/4$  Plättchen auch nicht-orthogonale Polarisationszustände erzeugen, indem wir das eine Plättchen gegen das andere nicht um genau  $90^\circ$  verschieden ausrichten. Dann erhält man ein Interferenzmuster mit nicht ganz so starkem Kontrast wie vorher, es sei denn wir stellen beide  $\lambda/4$ -Plättchen in exakt im gleichen Winkel auf. Wählen wir etwa für beide  $\lambda/4$ -Plättchen genau  $+45^\circ$ , ergibt sich statt des Zustandes 10 nunmehr

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1 + \exp[i\varphi(\vec{x})]\} |L\rangle, \quad (12)$$

und wir erhalten das alte Interferenzmuster zurück. Wir haben dabei aber wieder auf jegliche Markierung, durch welchen Spalt das Photon gekommen ist, verzichtet.

Bei einer beliebigen relativen Stellung der Plättchen zueinander, ergibt sich vermöge der Messung des Polarisationszustandes des Photons eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsaussage, durch welchen der beiden Spalte es gekommen ist, die von der Wahrscheinlichkeitsverteilung der größtmöglichen Unkenntnis, also daß es mit der Wahrscheinlichkeit 50% durch den einen oder anderen Spalt gelangt ist, verschieden ist, d.h. man erhält ggf. etwas mehr Gewißheit, daß es vielleicht eher durch Spalt 1 gekommen sein mag, was natürlich nicht bedeutet, daß wir dann wie in der Idealanordnung, die wir gerade oben beschrieben haben, mit Gewißheit wissen, durch welchen Spalt es auf den Schirm gelangt ist.

Dies ist die typische Situation für die Eigenschaft der Mikrowelt, die Bohr als *Komplementarität* bezeichnet hat: Die Interferenzfähigkeit und die Kenntnis, durch welchen Spalt ein Photon gelangt ist, wurde als „komplementäre Eigenschaften“ der Photonen bezeichnet: Je genauer man den Weg kennt, den die Photonen genommen haben, desto unschärfer wird das Interferenzmuster und vice versa. Diese Art Komplementarität war auch als „Welle-Teilchen-Dualismus“ bekannt.

Aus Sicht der hier vertretenen minimalen Interpretation der Quantentheorie, wonach der Zustand nicht einzelne Photonen sondern lediglich unsere Kenntnis über die statistischen Eigenschaften von Photonenensembles beschreibt, ist dies freilich eine recht leere Aussage: Die Quantentheorie beschreibt gar nicht das einzelne Photon, und es ist weder sinnvoll, ein Photon als klassisches Teilchen noch es als klassische Welle anzusehen! Wir kommen auf diese fundamentalen Fragestellungen zur Interpretation der Quantentheorie zum Schluß dieses Artikels noch ausführlicher zu sprechen.

## 4 Quantenradieren der Welcher-Weg-Information

Die obige Rekapitulation des Doppelspaltexperiment betraf einzelne Photonen. Dieselben Phänomene können freilich im Rahmen der klassischen Elektrodynamik mit einfachen ebenen Wellenlösungen der Maxwellgleichungen, die quantentheoretisch sogenannten kohärenten Zuständen entsprechen, also Zuständen unbestimmter Photonenzahl, verstanden werden.

## 4.1 Maximal verschränkte Photonenpaare

Nun wenden wir uns einer spezifisch quantentheoretisch motivierten Versuchsanordnung zu. Dabei machen wir Gebrauch von der spezifisch quantenmechanischen Möglichkeit der *Verschränkung*. Zur Vereinfachung betrachten wir sogenannte maximal verschränkte Photonenpaare.

Diese können heutzutage im Labor standardmäßig erzeugt werden. Dabei wird mittels eines Lasers ein doppelbrechender Kristall zum spontanen Emittieren von verschränkten Photonenpaaren, wobei jedes Photon die halbe Frequenz des einfallenden Laserlichtes besitzt, angeregt („parametric downconversion“). Der maximalen Verschränkung entsprechen die beiden folgenden Polarisationszustände, die man auch als *Bell-Zustände* bezeichnet:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |\hat{x}\rangle_s \otimes |\hat{y}\rangle_p \pm |\hat{y}\rangle_s \otimes |\hat{x}\rangle_p \right]. \quad (13)$$

Dabei haben wir die Indizes  $s$  und  $p$  für den Raumanteil der Zustände eingeführt. Wir können uns darunter Wellenpakete vorstellen, die räumlich wohlsepariert sein können. Im folgenden wollen wir das eine Photon durch den Doppelspalt, der am Ort  $s$  aufgestellt sei, und das andere durch einen in eine bestimmte Richtung eingestellten Polarisationsfilter am Ort  $p$  schicken.

Welcher quantenmechanische Zustand kommt nun einem der beiden Photonen zu? Dazu müssen wir nur den *reduzierten statistischen Operator* für z.B. das  $s$ -Photon ausrechnen, d.h. wir müssen die Spur über das  $p$ -Photon bilden<sup>4</sup>:

$$\mathbf{R}_s = \text{Tr}_p |\Psi\rangle \langle\Psi| = \frac{1}{2} [(|\hat{x}\rangle \langle\hat{x}|)_s + (|\hat{y}\rangle \langle\hat{y}|)_s] = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\text{photon at } s}. \quad (14)$$

Das bedeutet, daß die  $s$ -Photonen jeweils für sich betrachtet unpolarisiert sind.

Das ist im Rahmen der statistischen Interpretation wieder nicht so verwunderlich, wie es auf den ersten Blick erscheinen mag: Der Zustand (13) entspricht ja einem Ensemble gleichartig präparierter Photonenpaare, und (14) beschreibt das Ensemble der Einzelphotonen in dem Paar, welches bei  $s$  gemessen wird. Ein in  $\hat{x}$ -Richtung ausgerichteter Polarisationsfilter wird im Mittel die Hälfte der Photonen durchlassen, und die andere Hälfte absorbieren, d.h. die Photonen bei  $s$  sind *unpolarisiert*. Wir können nicht voraussagen, ob ein einzelnes Photon in  $\hat{x}$ - oder  $\hat{y}$ -Richtung polarisiert ist.

Andererseits ist aber vollkommen determiniert, in welchem Polarisationszustand sich das  $p$ -Photon befindet, sobald wir festgestellt haben, in welchem Zustand sich das  $s$ -Photon befindet. Angenommen, wir betrachten nur das Teilensemble, bei denen das  $s$ -Photon in  $\hat{x}$ -Richtung polarisiert ist. Der Zustand des  $p$ -Photons dieses Teilensembles ist dann aufgrund des Projektionspostulats wie folgt bestimmt:

$$\mathbf{R}_{p|s \text{ photon } \hat{x}\text{-polarisiert}} = \text{Tr}_s (|\hat{x}\rangle \langle\hat{x}| \otimes 1 |\Psi\rangle \langle\Psi|) / (1/2) = (|\hat{y}\rangle \langle\hat{y}|)_p. \quad (15)$$

Eben diese Eigenschaft bezeichnet man als maximale *Verschränkung*: Für jedes  $s$ -Photon, welches bei einer Messung bei  $s$  als  $\hat{x}$ -polarisiert festgestellt wird, muß das  $p$ -Photon zwingend  $\hat{y}$ -polarisiert sein, obwohl vor der Determinierung der Polarisation des  $s$ -Photons die Polarisation des  $p$ -Photons vollständig unbestimmt ist. Diese Korrelationen können dabei im Prinzip beliebig weit voneinander entfernte Photonen betreffen, so daß die Polarisationsmessung am  $s$ -Photon, ein lokaler Vorgang, keine Auswirkungen auf das  $p$ -Photon hat. Die strikte Korrelation

<sup>4</sup>Wir betrachten hier und im folgenden den Bell-Zustand mit dem oberen Vorzeichen. Dieselbe Rechnung läßt sich freilich auch mit dem anderen Zustand genau analog ausführen.



zwischen den Polarisationszuständen der beiden Photonen kommt ja auch nicht durch die Messung der Polarisation am  $p$ -Photon zustande sondern durch die Tatsache, daß  $s$ - und  $p$ -Photon gemeinsam als verschränktes Paar präpariert wurden.

Es ist daher freilich auch gleichgültig, ob wir erst die  $\hat{x}$ -Polarisation bei  $s$  und dann die  $\hat{y}$ -Polarisation bei  $p$  konstatieren oder umgekehrt: Stets kommen entweder beide Photonen durch oder es werden beide absorbiert. Wir können die eine oder andere Reihenfolge der Registrierung einfach dadurch erreichen, daß wir den einen Polarisationsfilter weiter von der Quelle entfernt aufstellen als den anderen.

Wir stellen hier schon fest, daß der berechtigte Einwand von Einstein, Podolsky und Rosen gegen die Kopenhagener Auffassung vom „Kollaps des Zustandes“ durch die minimale statistische Interpretation vollkommen eliminiert ist: Es sind keinerlei „spukhafte Fernwechselwirkungen“ zwischen dem Polarisationsfilter bei  $p$  mit dem Photon bei  $s$  notwendig, um die 100%-Korrelationen zu erklären, sie sind durch die statistischen Eigenschaften der im verschränkten Zustande (13) präparierten Photonenpaare gegeben, und in diesem Zustande ist das Photonenpaar präpariert worden, *bevor* die Polarisationszustände der Einzelphotonen gemessen werden.

Freilich bedeutet die minimale statistische Interpretation den Verzicht auf die Beschreibung eines einzelnen Photonenpaares. Der Zustandsvektor dient einzig der Beschreibung eines Ensembles gleichartig präparierter Systeme. Dem Einzelsystem kommt der quantenmechanische Zustand aufgrund einer geeigneten Präparationsvorschrift zu. Dieser Zustand kann aber nicht aufgrund einer Messung an einem einzelnen System festgestellt werden, sondern nur durch hinreichend viele Messungen an einem Ensemble solcherart präparierter Einzelsysteme. Der „Kollaps des Zustandes“ bedeutet in diesem Sinne nicht mehr als die Feststellung eines Einzelereignisses und der Neuordnung eines Polarisationszustandes aufgrund dieser gewonnen Erkenntnis. Wir verzichten also auf eine Beschreibung des Einzelsystems durch bestimmte diesem System zugeordnete physikalische Entitäten. Wir kommen auf diese Problematik weiter unten noch zu sprechen.

## 4.2 Der Quantenradierer

Wir betrachten nun folgendes Experiment: Wir präparieren den Doppelspalt wie bisher mit den um  $90^\circ$  gegeneinander verdrehten  $\lambda/4$ -Plättchen und beschießen diese Anordnung mit den  $s$ -Photonen des verschränkten Paares, während wir die Polarisation der  $p$ -Photonen mittels eines Polarisationsfilters messen, den wir in beliebigem Winkel relativ zur Ausrichtung der  $\lambda/4$ -Plättchen einstellen können.

Zunächst bestimmen wir nun den Zustand der Photonenpaare, vorausgesetzt das  $s$ -Photon ist durch Spalt 1 bzw. Spalt 2 gelaufen. Für ein  $\lambda/4$ -Plättchen, das um  $\pm 45^\circ$  gegenüber der  $\hat{x}$ -Richtung verdreht ist, haben wir die bereits in (9) angegebenen Operatoren

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_+ &= |L\rangle \langle \hat{x}| + i |R\rangle \langle \hat{y}|, \\ \mathbf{Q}_- &= |R\rangle \langle \hat{x}| - i |L\rangle \langle \hat{y}| \end{aligned} \tag{16}$$

auf den Polarisationszustand des einlaufenden  $s$ -Photons anzuwenden<sup>5</sup>.

Mit Hilfe von (16) können wir den Zustand für die Photonenpaare, wenn das  $s$ -Photon gerade

---

<sup>5</sup>Dabei vernachlässigen wir die Möglichkeit, daß das Photon auch reflektiert werden kann. Diese reflektierten Photonen gehen unserem Spaltexperiment freilich ohnehin verloren. Wir zählen sie daher nicht zu dem Ensemble hinzu.

die Spaltöffnungen 1 bzw. 2 durchlaufen hat, wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= \mathbf{Q}_+ \otimes \mathbb{1} |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |L\rangle \otimes |\hat{y}\rangle + i |R\rangle \otimes |\hat{x}\rangle ], \\ |\Psi_2\rangle &= \mathbf{Q}_- \otimes \mathbb{1} |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |R\rangle \otimes |\hat{y}\rangle - i |L\rangle \otimes |\hat{x}\rangle ]. \end{aligned} \quad (17)$$

Ist das  $s$ -Photon am Schirm angekommen, erhalten wir wie oben beim Doppelspaltexperiment mit Einzelphotonen den Überlagerungszustand

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\Psi_1\rangle + \exp[i\varphi(x)] |\Psi_2\rangle \}. \quad (18)$$

Es ist klar, daß wir hier den Polarisationszustand des  $p$ -Photons noch nicht berücksichtigt haben. Wir nehmen an, daß der Schirm, der die durch die Doppelspaltanordnung gelaufenen  $s$ -Photonen registriert und der Polarisationsfilter, der die  $p$ -Photonen mißt, sehr weit voneinander entfernt sind, so daß die eine Messung die andere nicht beeinflusst, d.h. es findet keinerlei Wechselwirkung der  $s$ -Photonen mit dem Polarisationsfilter für das  $p$ -Photon statt.

Betrachten wir also die  $s$ -Photonen einfach ohne Zurkenntnisnahme der Polarisation der  $p$ -Photonen, erhalten wir als Aufenthaltswahrscheinlichkeit für  $s$ -Photonen an der Stelle  $x$  am Schirm

$$P_{\text{alle Photonen}}(x) = \langle \Psi' | \Psi' \rangle = 1, \quad (19)$$

also kein Interferenzmuster, denn  $\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = 0$ .

Wir können von jedem einzelnen Photonenpaar die Information gewinnen, welchen Weg das jeweilige  $s$ -Photon in der Doppelspaltanordnung genommen hat, indem wir den Polarisationsfilter für das  $p$ -Photon in  $\hat{x}$ -Richtung ausrichten und zugleich für das jeweilige  $s$ -Photon feststellen, ob es rechts- oder linkspolarisiert ist.

Ein Blick auf (17) zeigt dann, daß das  $s$ -Photon durch Spalt 1 gelaufen ist, wenn entweder das  $p$ -Photon in  $\hat{y}$ -Richtung und das  $s$ -Photon zugleich linkszirkular oder das  $p$ -Photon in  $\hat{x}$ -Richtung und das  $s$ -Photon zugleich rechtszirkular polarisiert sind. Die entsprechenden anderen beiden Möglichkeiten ergeben dann, daß das Photon durch Spalt 2 gelaufen sein muß. Wegen dieser prinzipiellen Möglichkeit, festzustellen, welchen Weg die  $s$ -Photonen gelaufen sind, ergibt sich gemäß (19) kein Interferenzmuster, wenn man alle Photonen betrachtet.

Stellen wir jedoch nun den Polarisationsfilter für die  $p$ -Photonen in  $45^\circ$ -Richtung auf und betrachten nur diejenigen  $s$ -Photonen, für die das  $p$ -Photon durchgekommen ist. Dadurch halbiert sich die Gesamtzahl der betrachteten Photonen, aber man erhält wieder ein Interferenzmuster, wenn auch ein etwas verschobenes.

Das sieht man wie folgt ein: Ein im Winkel  $\alpha$  zur  $\hat{x}$ -Richtung ausgerichteter Polarisationsfilter wird durch den Projektionsoperator

$$\mathbf{P}(\alpha) = |\hat{\alpha}\rangle \langle \hat{\alpha}| \quad \text{mit} \quad |\hat{\alpha}\rangle = \cos \alpha |\hat{x}\rangle + \sin \alpha |\hat{y}\rangle \quad (20)$$

beschrieben.

Der Zustand dieses Teilensembles aller Photonenpaare wird durch den (unnormierten!) Zustandsvektor

$$\begin{aligned} |\psi''\rangle &= \mathbb{1} \otimes \hat{P}(45^\circ) |\psi'\rangle \\ &= \frac{1 - i \exp[i\varphi(x)]}{2\sqrt{2}} \left[ |L\rangle \otimes \left| \widehat{45^\circ} \right\rangle + i |R\rangle \otimes \left| \widehat{45^\circ} \right\rangle \right] \end{aligned} \quad (21)$$

beschrieben, wobei das  $s$ -Photon am Spalt registriert wurde.

Es ergibt sich für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des  $s$ -Photons am Schirm:

$$P(s\text{-Photon}@x|p\text{-Photon } \widehat{45^\circ}\text{-polarisiert}) = \langle \Psi'' | \Psi'' \rangle = \frac{1}{2} \{1 + \sin[\varphi(x)]\}. \quad (22)$$

Daß hier der Sinus anstelle des Cosinusses wie in (4) zu stehen kommt, ist allein auf die Phasenverschiebung um  $90^\circ$  aufgrund des  $\lambda/4$ -Plättchens, welche den Faktor  $i$  vor dem Exponentialausdruck bewirkt, zurückzuführen.

Für die andere Hälfte der Photonen im Ensemble ist die Rechnung genau analog auszuführen. Man muß nur  $\mathbf{P}(-45^\circ)$  in (21) verwenden. Dann erhält man

$$P(s\text{-Photon}@x|p\text{-Photon } \widehat{-45^\circ}\text{-polarisiert}) = \langle \Psi'' | \Psi'' \rangle = \frac{1}{2} \{1 - \sin[\varphi(x)]\}. \quad (23)$$

Da diese beiden Teilensembles genau komplementär sind, d.h. die Polarisationsrichtungen  $\pm 45^\circ$  gerade zueinander orthogonale Zustände sind (entsprechend ob das  $p$ -Photon durch den Filter gelangt oder absorbiert wird) ergibt sich selbstverständlich für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit aller Photonen am Schirm wieder (19).

Dies ist physikalisch auch notwendig, denn wir haben ja die Messung der Polarisation der  $p$ -Photonen so ausgeführt, daß sie zu keinerlei Wechselwirkung der  $s$ -Photonen mit dem Polarisationsfilter geführt hat. Wir haben die  $s$ -Photonen durch die Polarisationsmessung am  $p$ -Photon also gar nicht beeinflußt.

Wir können allerdings nun auch nicht mehr gleichzeitig den Weg eines jeden einzelnen  $s$ -Photons durch die Spaltanordnung kennen, selbst wenn wir nachmessen würden, ob die  $s$ -Photonen links- oder rechtszirkular polarisiert sind, denn dazu müßten wir ja zusätzlich wissen, ob die jeweiligen  $p$ -Photonen in  $\hat{x}$ - oder  $\hat{y}$ -Richtung polarisiert waren. Das ist aber nun prinzipiell unmöglich, da wir den Polarisationsfilter für die  $p$ -Photonen auf  $45^\circ$  gestellt haben, und das schließt die Kenntnis aus, ob das  $p$ -Photon im  $\hat{x}$ - bzw.  $\hat{y}$ -Polarisationszustand vorliegen, da die Zustände  $|\widehat{\pm 45^\circ}\rangle$  eine echt andere Basis im Raum der Polarisationszustände als die Basis aus  $|\hat{x}\rangle$  und  $|\hat{y}\rangle$  ist, maW. die Operatoren, die der Observablen „Polarisation in  $\hat{x}$ - bzw.  $\hat{y}$ -Richtung“ entsprechen und diejenigen für  $\pm 45^\circ$  kommutieren nicht, sind also inkompatibel.

Man spricht hier vom „Quantenradieren von Welcher-Weg-Information“, weil durch die Messung der  $\pm 45^\circ$ -Polarisation die bei einer Wahl, die  $\hat{x}$ -Polarisation zu messen, prinzipiell vorhandene Möglichkeit, festzustellen, welchen Weg das  $s$ -Photon genommen hat, zerstört wurde, wobei aber keinerlei Manipulationen an dem  $s$ -Photon selbst vorgenommen werden müssen.

Diese Möglichkeit des „Quantenradierens“ ist ähnlich wie das „Teleportieren“ von Photonenzuständen (Zeilingerexperiment) nur aufgrund der quantentheoretischen Natur der Photonen und der Möglichkeit, verschränkte Photonenpaare zu erzeugen, möglich. Es ist ein klassisch nicht erklärbarer Vorgang.

Es ist auch klar, daß das Quantenradieren das Gesamtensemble der Photonen nicht irgendwie ändert, denn wir können ja die gesamte Situation einfach aufzeichnen, indem wir von jedem Photonenpaar speichern, ob das  $p$ -Photon in  $+45^\circ$  oder  $-45^\circ$ -Richtung polarisiert war und zugleich den Ort  $x$  des dazugehörigen  $s$ -Photons am Schirm notieren. Wir können dann *nach* dieser kompletten Messung entscheiden, ob wir ein Interferenzmuster sehen wollen oder nicht. Ersteres erreichen wir, indem wir alle  $s$ -Photonen betrachten und über die aufgezeichneten Positionen auf der Photoplatte deren Ortsverteilungsdichte bilden. Wir erhalten durch Normierung dann eine

konstante Wahrscheinlichkeitsdichte, also kein Interferenzmuster. Betrachten wir hingegen nur diejenigen  $s$ -Photonen, deren zugehöriges  $p$ -Photon in  $+45^\circ$  polarisiert war, erhalten wir wieder durch Auswerten der Ortsverteilung dieser  $s$ -Photonen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Diese weist nun aber wieder das Interferenzmuster auf.

Man kann nun allgemeinere Fälle betrachten, wo man die  $p$ -Photonen-Polarisation nicht in  $\pm 45^\circ$ -Richtung mißt sondern in irgendeinem anderen Winkel. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das jeweilige  $s$ -Photon in  $x$ -Richtung polarisiert war, wenn das  $p$ -Photon in der betrachteten Polarisationsrichtung polarisiert war, nicht exakt  $1/2$  sondern je nach Winkelstellung größer oder kleiner. Entsprechend hat man mit einer etwas höheren Genauigkeit als bei  $\pm 45^\circ$ -Stellung des Polarisationsfilters für die  $p$ -Photonen korrekte Welcher-Weg-Information über das  $s$ -Photon. Wir haben dann zwar keine sichere Welcher-Weg-Information aber in diesem probabilistischen Sinne andererseits diese Information auch nicht vollständig ausradiert. Entsprechend zeigt die zur obigen Rechnung analoge Betrachtung, daß in diesem Falle immer noch ein Interferenzmuster auftritt, wenn man nur die  $s$ -Photonen betrachtet, für die das dazugehörige  $p$ -Photon in die betreffende Richtung polarisiert war, das allerdings einen geringeren Kontrast aufweist als wenn wir überhaupt keine Welcher-Weg-Information über die  $s$ -Photonen mehr besitzen, d.h. unvollständiges Ausradiieren der Welcher-Weg-Information führt auch nur auf eine ungenauere Wiederherstellung des Interferenzmusters.

## A Zur Theorie des $\lambda/4$ -Plättchens

Im folgenden leiten wir den quantenmechanischen Operator für ein  $\lambda/4$ -Plättchen im Polarisationsraum des Photonenzustands her.

Zunächst betrachten wir kurz die klassische Theorie der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in anisotropen nichtmagnetischen nichtleitenden Medien. Die detaillierte Quantentheorie der Quantenelektrodynamik in kondensierter Materie ist hier zum Verständnis nicht erforderlich. Wir behandeln auch das Medium als durch die makroskopischen Materialkonstanten beschrieben und sehen von möglichen nichtlinearen Vorgängen ab, d.h. wir behandeln die klassische „linear-response“-Näherung der Materie-Wellenwechselwirkung. Wir verwenden rationalisierte Gaußsche Einheiten mit  $c = 1$  (Heaviside-Lorentzsches Maßsystem).

Die so genäherten makroskopischen Maxwellgleichungen beziehen sich dann auf die vier makroskopischen elektromagnetischen Felder  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_t \vec{B}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \partial_t \vec{D} + \vec{j}, & \operatorname{div} \vec{D} &= \rho. \end{aligned} \tag{24}$$

Im folgenden gehen wir davon aus, daß die makroskopisch gemittelten Ladungen und Ströme überall verschwinden, d.h.  $\vec{j} = 0$  und  $\rho = 0$ .

Weiter nehmen wir an, daß die anisotropen Materialien magnetisch neutral sind, so daß also

$$\vec{B} = \vec{H}. \tag{25}$$

gesetzt werden kann. Den Zusammenhang zwischen  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$  setzen wir jedoch dem anisotropen Medium zufolge als allgemein linear an, d.h. wir definieren den Tensor  $\hat{\epsilon}$  zu

$$\vec{D} = \hat{\epsilon} \vec{E}. \tag{26}$$

Damit haben wir die Maxwellgleichungen über unsere stark vereinfachten Materialgleichungen wieder auf die elektromagnetischen Grundfelder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  zurückgeführt:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \hat{\epsilon} \partial_t \vec{E}, \quad \operatorname{div} \hat{\epsilon} \vec{E} = 0. \quad (27)$$

Dabei gehen wir davon aus, daß  $\hat{\epsilon}$  innerhalb des betrachteten Kristalls zeitlich und räumlich konstant ist, d.h. das Material ist zwar anisotrop, jedoch homogen.

Nun erinnern wir uns der Standardherleitung des Energiesatzes. Dazu bilden wir den Poyntingvektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}, \quad (28)$$

von dem wir die Divergenz bilden:

$$\operatorname{div} \vec{S} = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} \quad (29)$$

Wir wenden nun darauf die entsprechenden Maxwellgleichungen (27) an:

$$\operatorname{div} \vec{S} = -\vec{B} \cdot \partial_t \vec{B} - \vec{E} \hat{\epsilon} \partial_t \vec{E}. \quad (30)$$

Das ist aber dann und nur dann eine totale Zeitableitung, wenn der Dielektrizitätstensor  $\hat{\epsilon}$  symmetrisch ist, und nur dann kann der Energiesatz gelten. Da wir durch die Erfahrung die Energieerhaltung für erwiesen ansehen, verlangen wir also

$$\hat{\epsilon}^t = \hat{\epsilon}. \quad (31)$$

Dann dürfen wir (30) schreiben als

$$\partial_t u + \operatorname{div} \vec{S} = 0, \quad u = \frac{1}{2} (\vec{B}^2 + \vec{E} \hat{\epsilon} \vec{E}). \quad (32)$$

Da wir weiter  $u$  als Energiedichte des elektromagnetischen Feldes deuten möchten und diese positiv definit sein soll, dürfen wir fernerhin annehmen, daß  $\hat{\epsilon}$  positiv definit ist.

Der Dielektrizitätstensor besitzt nun aber eine Hauptachsenform, d.h. es existiert ein kartesisches Koordinatensystem, bzgl. dessen dieser Tensor diagonal ist:  $\hat{\epsilon} = \operatorname{diag}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ .

Es ist leicht zu zeigen, daß die Maxwellgleichungen für die Felder im anisotropen Material ebene Wellenlösungen besitzen, wo  $\vec{D} = \hat{\epsilon} \vec{E}$ ,  $\vec{E}$  und  $\vec{n}$  (der Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung der Welle) koplanar sind und  $\vec{B}$  senkrecht auf dieser Ebene steht. Zum Glück müssen wir uns mit der geometrisch recht verwickelten Theorie der allgemeinen Doppelbrechung beim Übergang von Licht in ein anisotropes Medium nicht weiter beschäftigen. Der interessierte Leser sei auf einführende Physikbücher wie [JF86, Som78] verwiesen.

Wir benötigen für das folgende nur die Lösung für eine ebene Welle, die sich in einer Hauptrichtung ausbreitet. Seien also  $\vec{e}_i$  mit  $i \in \{1, 2, 3\}$  diese Hauptrichtungen. Sie bilden ein kartesisches Koordinatensystem und breite sich die elektromagnetische Welle in 3-Richtung aus. Der Ansatz für eine Lösung der Maxwellgleichungen im inhomogenen Medium lautet also:

$$\vec{E} = \vec{a} \exp(-i\omega t + ik_3 x_3). \quad (33)$$

Aus der vierten der Gln. (27) folgt damit

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} \epsilon_1 E_1 \\ \epsilon_2 E_2 \\ \epsilon_3 E_3 \end{pmatrix} = i\epsilon_3 a_3 k_3 \stackrel{!}{=} 0, \quad (34)$$

d.h. es muß  $a_3 = 0$  sein, d.h. für Ausbreitung in Richtung einer der dielektrischen Hauptachsen des Kristalls ist das elektrische Feld notwendig transversal polarisiert.

Weiter eliminieren wir nun  $\vec{B}$  aus den Maxwellgleichungen, indem wir auf die erste Gleichung in (27) den Operator  $\text{rot}$ , auf die dritte  $\partial_t$  anwenden:

$$\text{rot } \partial_t \vec{B} = \hat{\epsilon} \partial_t^2 \vec{E} = -\text{rot rot } \vec{E}. \quad (35)$$

Für die spezielle Welle (33) ist nun aber wegen  $\vec{e}_3$  auch  $\text{div } \vec{E} = 0$ , und folglich können wir schreiben

$$\hat{\epsilon} \partial_t^2 \vec{E} = \Delta \vec{E}. \quad (36)$$

Einsetzen von (33) führt auf das Gleichungssystem

$$k_z^2 \vec{a} = \omega^2 \hat{\epsilon} \vec{a}. \quad (37)$$

Dieses Gleichungssystem hat zwei linear unabhängige Lösungen, und zwar

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1, \quad k_z = \sqrt{\epsilon_1} \omega := n_1 \omega, \quad (38)$$

$$\vec{a} = a_2 \vec{e}_2, \quad k_z = \sqrt{\epsilon_2} \omega := n_2 \omega. \quad (39)$$

Das bedeutet, daß sich in 1-Richtung polarisiertes Licht mit einer anderen Phasengeschwindigkeit ausbreitet als in 2-Richtung polarisiertes Licht. Die allgemeine Lösungen von der Gestalt sich in Richtung einer der optischen Achsen des Kristalls ausbreitenden ebenen Wellen ist also durch

$$\vec{E} = \exp(-i\omega t) [a_1 \vec{e}_1 \exp(in_1 \omega z) + a_2 \vec{e}_2 \exp(in_2 \omega z)] \quad (40)$$

gegeben. Dabei sind  $a_1$  und  $a_2$  i.a. beliebige komplexe Zahlen<sup>6</sup>.

Ein Wellenplättchen ist nun einfach eine planparallele Platte aus einem optisch anisotropen Material, die entlang einer Ebene geschnitten ist, die von zwei der optischen Achsen aufgespannt werden. Die dritte Achse steht also senkrecht auf der Ebene.

Betrachten wir jetzt eine ebene Welle, die aus dem Vakuum senkrecht auf dieses Wellenplättchen trifft,

$$\vec{E} = \vec{A} \exp[-i\omega(t - z)], \quad (41)$$

so tritt aufgrund der üblichen Randbedingungen an die elektromagnetischen Felder (es müssen sich beim Übergang vom Vakuum ins Medium und wieder ins Vakuum die Tangentialkomponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  sowie die Normalkomponenten von  $\vec{D}$  und  $\vec{B}$  stetig ändern) keine Brechung auf, d.h. die Welle läuft unabgelenkt in der Einfallrichtung weiter. Weiter erhalten wir die Bedingung, daß sich die Frequenz  $\omega$  der einfallenden Welle im Material nicht ändert.

Setzen wir das Plättchen der Dicke  $d$  nun in die  $xy$ -Ebene (vgl. Abb. 1), so daß wir genau die Situation haben, zu der wir die ebenen-Wellenlösungen soeben bestimmt haben, bedeutet dies, daß für  $z > d$  das folgende elektrische Feld vorliegen muß:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z) &= \exp(-i\omega t) \tau [A_1 \vec{e}_1 \exp(in_1 \omega d) + A_2 \vec{e}_2 \exp(in_2 \omega d)] \exp(i\omega z) \\ &= \exp(-i\omega t) \tau \exp\left(i\omega d \frac{n_1 + n_2}{2}\right) \exp(-i\varphi) [\vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 \exp(2i\varphi)] \exp(i\omega z), \quad (42) \\ \varphi &= \frac{\omega d(n_2 - n_1)}{2} = \frac{\pi d(n_2 - n_1)}{\lambda_0}, \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Es ist klar, daß die eigentlichen Lösungen der Maxwellgleichungen reelle Felder sind, wir also stets die Realteile genommen zu denken haben!

Dabei ist  $\lambda_0 = 2\pi/\omega$  die Wellenlänge des Lichts im Vakuum. Die Phasendifferenz zwischen der in  $\vec{e}_1$ - und der in  $\vec{e}_2$ -Richtung polarisierten Teilwelle ist

$$\Delta\varphi = 2\varphi = \frac{2\pi d(n_2 - n_1)}{\lambda_0}. \quad (43)$$

Nun wird  $\Delta\varphi = \pi/2$  für  $d = \lambda_0/[4(n_2 - n_1)]$ . Solch ein Plättchen konvertiert dann linear in elliptisch polarisiertes Licht. Freilich darf die Dicke auch  $(j + 1/4)\lambda_0/(n_2 - n_1)$  mit  $j \in \mathbb{N}$  betragen. Ist  $n_2 > n_1$ , so ist die  $c_2 < c_1$ . Man nennt daher in diesem Fall die Hauptachse  $\vec{e}_1$  die schnelle und  $\vec{e}_2$  die langsame Achse. Insbesondere entsteht dann für  $A_2 = A_1$  links- und für  $A_1 = A_2$  rechts-zirkular polarisiertes Licht.

## Literatur

- [Boh35] N. Bohr, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Physical Review **48**, 696 (1935).  
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.48.696>
- [EPR35] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).  
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777>
- [Hee02] H. v. Hees, *Introduction to Quantum Field Theory* (2002).  
<http://fias.uni-frankfurt.de/~hees/publ/lect.pdf>
- [JF86] G. Joos, I. M. Freeman, *Theoretical Physics*, 3. Aufl., Dover Publications, Inc., New York (1986).
- [Som78] A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik IV, Optik*, Verlag Harri Deutsch (1978).
- [Wei95] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Bd. 1, Cambridge University Press (1995).
- [WTPM02] S. P. Walborn, M. O. Terra Cunha, S. Pádua, C. H. Monken, *Double-slit quantum eraser*, Phys. Rev. A **65**, 033818 (2002).  
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.65.033818>