Zeilingers Experiment zur Teleportation (Theorieteil)

Hendrik van Hees

28. Mai 1998

1 Grundlagen aus der Quantentheorie

Im folgenden benötigen wir nur einen minimalen Teil der Quantenmechanik, insbesondere aber die Postulate der Messung an einem quantenmechanischen System.

Ein quantenmechanisches System wird durch eine Observablenalgebra, die als Darstellung durch hermitesche Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathscr{H}$ realisiert wird, definiert.

Der Zustand eines Systems wird eindeutig und vollständig durch einen komplexen Strahl im Hilbertraum charakterisiert:

$$\forall \left|\psi\right\rangle \in \mathscr{H} : \; [\left|\psi\right\rangle] = \{c \left|\psi\right\rangle | c \in \mathbb{C}_{\neq 0}\}. \tag{1}$$

Die exakte Messung einer Observablen O, die durch den hermiteschen Opertor $\underset{\sim}{O}$ repräsentiert wird, liefert stets einen Wert aus dem Spektrum dieses Operators, also einen Eigenwert oder einen "verallgemeinerten Eigenwert". Dabei geht das System in einen (verallgemeinerten) Eigenzustand zu dem gemessenen Spektralwert über.

Befand sich das System vor der Messung in dem Zustand $[\left|\psi\right\rangle]$, befindet es sich nach der Messung der Observablen O mit dem Resultat o in dem Zustand

$$\left[\int_{r \in I} \mathrm{d}r S(p,r) \left|o,r\right\rangle \left\langle o,r\right| \psi\rangle\right] := [\underset{\sim}{P}_o \left|\psi\right\rangle], \tag{2}$$

wobei $S(o,r)$ die charakteristische verallgemeinerte Funktion des Spektrums ist und $\{\left|o,r\right\rangle\}_{r \in I}$ ein Orthonormalsystem des Eigenraums von $\underset{\sim}{O}$ zum Spektralwert o ist. I bezeichnet eine geeignete Indexmenge.

Aus diesem Postulat folgt übrigens, daß eine vollständige Festlegung des Zustandes i.a. die Messung mehrerer Observablen erfordert, die so beschaffen sein müssen, daß ihre Operatoren paarweise vertauschen und folglich simultane verallgemeinerte Eigenräume besitzen. Eine Messung legt genau dann den Zustand des Systems vollständig fest, wenn die simultanen Eigenräume der gemessenen verträglichen Observablen in jedem Fall eindimensional sind. Wir bezeichnen einen solchen Satz von Observablen als *vollständigen Satz kompatibler Observabler* und eine Messung eines solchen als *vollständige Messung.* Wir bezeichnen weiter eine Observable als verträglich mit einem gegebenen Zustand, wenn dieser (verallgemeinerter) Eigenvektor des der Observablen zugeordneten Operators ist. Nach (2) ist dann das Resultat sicher der zu diesem (verallgemeinerten) Eigenvektor gehörige Spektralwert und das System verbleibt in dem gegebenen Zustand.

Die Messung einer mit dem gegebenen Zustand nicht verträglichen Observablen ergibt auch stets einen Spektralwert, aber dieser liegt vor der Messung nicht fest. Die postulierte Vollständigkeit der Bestimmung des Zustandes des Systems bedeutet, daß die durch die Observable bestimmte physikalische Eigenschaft dem System aufgrund seiner Präparation in dem gegebenen Zustand nicht zukommt. Erst die Messung der Observablen weist dem System die durch diese Observable beschriebene physikalische Eigenschaft zu. Nach (2) geht es dabei in einen wohldefinierten zu dem gemessenen Wert der Observablen gehörigen (verallgemeinerten) Eigenzustand der gemessenen Observablen über, und verliert dadurch die Eigenschaften, die durch die vor der Messung durch Bestimmung der Werte eines vollständigen Satzes kompatibler Observable dem System zugeordnet wurden.

Diesen Abschnitt zusammenfassend können wir festhalten, daß ein Meßapparat, der die Frage zu entscheiden gestattet, ob sich ein System in dem Zustand $[|\psi\rangle]$ befindet, durch den Projektor $\underset{\sim}{P}_{|\psi\rangle}$ dargestellt wird. Wegen $\underset{\sim}{P}_{|\psi\rangle}{}^2 = \underset{\sim}{P}_{|\psi\rangle}$ (wobei wieder die Normierung des Zustandes $|\psi\rangle$ auf 1 vorausgesetzt wurde, besitzt dieser die Eigenwerte 0 und 1, und $|\psi\rangle$ ist der einzige Eigenvektor mit Eigenwert 1, während jeder dazu orthogonale Vektor Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist.

Es lassen sich jedoch Wahrscheinlichkeitsaussagen bzgl. der Messung beliebiger Observablen treffen: Befindet sich das System vor der Messung im Zustand $|\psi\rangle$, so ist die Wahrscheinlichkeit (im Falle, daß der gemessene Spektralwert im diskreten Teil des Spektrums liegt, also ein echter Eigenwert ist) bzw. die Wahrscheinlichekeitsdichte (im Falle, daß der Spektralwert im kontinuierlichen Teil des Spektrums liegt) dafür, daß es sich nach der Messung der Observablen im Zustand $|o, r\rangle$ befindet:

$$P(o, r) = |\, \langle \psi |\, o, r \rangle \,|^2, \tag{3}$$

wobei wir voraussetzen, daß die den Zustand repräsentierenden (verallgemeinerten Zustände) in der üblichen Weise normiert sind (also auf 1 für Hilbertraumvektoren und auf δ-Funktionen für verallgemeinerte Eigenvektoren).

Diesen Abschnitt zusammenfassend können wir festhalten, daß ein Meßapparat, der die Frage zu entscheiden gestattet, ob sich ein System in dem Zustand $[|\psi\rangle]$ befindet, die durch den Projektor $\underset{\sim}{Q}_{|\psi\rangle}$ repräsentierte Observable mißt. Wegen $\underset{\sim}{Q}^2_{|\psi\rangle} = \underset{\sim}{Q}_{|\psi\rangle}$ (wobei wieder die Normierung des Zustandes $|\psi\rangle$ auf 1 vorausgesetzt wurde, besitzt dieser die Eigenwerte 0 und 1, und $|\psi\rangle$ ist der einzige Eigenvektor mit Eigenwert 1, während jeder dazu orthogonale Vektor Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist.

Wir werden sehen, daß das Zeilingerexperiment einen hochpräzisen Test dieser grundlegenden Postulate des Meßprozesses gestattet, und zwar in einem Kontext, der eng mit dem berühmten Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon (EPR-Paradoxon) verknüpft ist.

2 Theorie des Zeilingerexperiments

Wie im experimentellen Teil dieser FAQ erklärt wurde, können antisymmetrisch verschränkte Zweiphotonenzustände der Form

$$\left|\psi^-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left|HV - VH\right\rangle \tag{4}$$

erzeugt werden, und es existieren Meßverfahren, die feststellen, ob sich zwei Photonen in einem solchen Zustand befinden.

In der obigen Gleichung haben wir nur den Polarisationsanteil der Photonenzustände notiert, und $|H\rangle$ bezeichnet den Zustand eines horizontal und $|V\rangle$ eines vertikal polarisierten Photons. Ferner verwenden wir die übliche abkürzende Schreibweise für Tensorprodukte von bras und kets, d.h. es bedeutet insbesondere

$$|HV - VH\rangle = |H\rangle \otimes |V\rangle - |V\rangle \otimes |H\rangle \,. \tag{5}$$

Es ist weiter klar, daß der Impulsanteil des Zweiphotonenzustandes (4) antisymmetrisiert sein muß, so daß insgesamt ein bosonischer Zustand entsteht, wie es sich für Photonen gehört.

Unter Teleportation verstehen wir die Möglichkeit, den Zustand $|\psi_1\rangle$ eines beliebigen Photons auf ein anderes Photon zu übertragen, ohne das Photon selbst zu "verschicken".

Wir wollen zeigen, daß dies gelingt, wenn zwei Photonen in dem antisymmetrisch verschränkten Zustand (4) vorliegen. Der Sender (von Zeilinger Alice genannt) will den Zustand von Photon 1 auf das Photon 3 übertragen, das sich beim Empfänger (Bob) befindet. Photon 3 ist mit Photon 2, das ebenfalls Alice zur Verfügung steht, gemäß (4) verschränkt. Der Spinzustand der drei Photonen ist also durch

$$|\psi_A\rangle = \frac{1}{2}\,|\psi_1\rangle \otimes |HV - VH\rangle \;\text{ mit }\; |\psi_1\rangle = \alpha\,|H\rangle + \beta\,|V\rangle \tag{6}$$

gegeben.

Alice führt nun die Messung aus, die die Frage beantwortet, ob sich Photon 1 mit Photon 2 in dem antisymmetrisch verschränkten Zustand (4) befindet. In dem benutzten Drei-Photonenraum ist der diese Messung repräsentierende Projektor durch

$$\underset{\sim}{Q}_T = \frac{1}{2}\,|\,HV - VH\rangle\,\langle HV - VH\,| \otimes \underset{\sim}{1} \tag{7}$$

gegeben. Wie wir sehen werden, beantwortet dieser Projektor die Frage, ob eine Teleportation stattgefunden hat, daher der Index T.

Es ist klar, daß (7) kein Eigenvektor zu $|\psi_A\rangle$ ist, also die Messung der Verschränktheit von Photon 1 mit Photon 2 nicht kompatibel ist mit dem Anfangszustand, d.h. es läßt sich nicht vorhersagen, ob die Photonen 1 und 2 tatsächlich verschränkt sind.

Wir nehmen nun an, eine Messung hat ergeben, daß sich die Photonen 1 und 2 in dem verschränkten Zustand befinden. Dann wissen wir gemäß (2), daß dann das System in den Zustand

$$|\psi_B\rangle = N \underset{\sim}{P}_T\,|\psi_A\rangle \,, \tag{8}$$

übergegangen ist. Dabei ist

$$\underset{\sim}{P}_T = \frac{1}{2}\,[|\,HV - VH\rangle\,\langle HV - VH\,| \otimes (|\,H\rangle\,\langle H\,| + |\,V\rangle\,\langle V\,|)] \,. \tag{9}$$

N ist der Normierungsfaktor, der den Zustand $|\psi_B\rangle$ auf 1 normiert.

Eine einfache Rechnung zeigt dann, daß

$$|\psi_B\rangle = -\frac{N}{2\sqrt{2}}\,|HV - VH\rangle \otimes |\psi_1\rangle \tag{10}$$

ist. Das bedeutet nun in der Tat, daß Alice durch ihre Messung, daß Photon 1 und Photon 2 antisymmetrisch verschränkt sind, den Ausgangszustand $|\psi_1\rangle$ des Photons 1 auf das Photon 3 bei Bob übertragen hat. Dabei ist ihr jede Information über den Einteilchenzustand von Photon 1 verloren gegangen, denn $|\psi_B\rangle$ zeigt, daß nach der Messung die Photonen 1 und 2 miteinander verschränkt sind, und dadurch ist diesen Photonen jede Individualität abhanden gekommen. Jede Messung einer Einteilcheneigenschaft an Photon 1 ist zu diesem verschränkten Zustand nicht verträglich.

Ebenso zeigt sich, daß auch die Verschränktheit von Bobs Photon 3 mit dem Photon 2 vollständig verloren gegangen ist, dafür besitzt Bobs Photon 3 aber jetzt mit Sicherheit die Einteilcheneigenschaften (also in unserem Fall die Polarisation), das Photon 1 vor der Teleportation, so können wir ja nun Alices Messung jetzt nennen, besessen hat.

Wie wir gesehen haben, ist Alices Messung nicht mit dem Anfangszustand kompatibel, d.h. sie kann nicht mit Sicherheit voraussagen, ob die Teleportation bei einem einzelnen Versuch, auch tatsächlich stattfindet. Das kann sie eben erst entscheiden, wenn sie die Messung durchgeführt hat, und tatsächlich die Verschränktheit von Photon 1 mit Photon 2 nachgewiesen ist.

Sie kann natürlich gemäß (3) ausrechnen, wie groß ihre Chancen stehen, tatsächlich den Zustand ihres Photons 1 auf Bobs Photon 2 zu übertragen, d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, ob eine Teleportation stattfindet:

$$W_T = |\,\langle \psi_B |\, \psi_A \rangle\,|^2 = |N|^2 \left| \left\langle \underset{\sim}{P}_T \psi_A \middle| \psi_A \right\rangle \right|^2 = |N|^2 \left| \left\langle \underset{\sim}{P}_T \psi_A \middle| \underset{\sim}{P}_T \psi_A \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{|N|^2} = \frac{1}{4}, \tag{11}$$

d.h. Alice wird durchschnittlich in 1/4 aller Fälle Erfolg mit ihrer Teleportation haben.

3 Bezug zum EPR-Paradoxon und Interpretation

Das scheinbar Paradoxe an diesem Resultat ist nun, daß diese Teleportation auch dann funktioniert, wenn Bob von Alice sehr weit entfernt ist. Diese Implikation der Quantentheorie wurde zuerst von Einstein Podolsky und Rosen erkannt und war der Hauptgrund für Einsteins Ablehnung der Quantentheorie, weil die Übertragung einer Eigenschaft scheinbar instantan erfolgt, also eine vermeintliche "spooky interaction at a distance" stattfindet, und das ist inkompatibel mit der Tatsache, daß sich gemäß der Relativitätstheorie kausal verknüpfte Ereignisse nicht mit einer größeren Geschwindigkeit als der Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können.

Zeilinger und andere Arbeitsgruppen haben nun aber gezeigt, daß sich Photonenpaare in verschränkten Zuständen (vgl. den experimentellen Teil des Artikels) präparieren und auch in weiten Entfernungen voneinander in diesem Zustand bringen lassen. Die Resultate der Messungen stimmen mit überwältigender Genauigkeit mit den theoretischen Resultaten überein.

Die obige Rechnung und die Erklärung des Versuchsablaufs sollte aber gezeigt haben, daß trotzdem keine Verletzung der Kausalität im Sinne der Relativitätstheorie vorliegt, denn die Präparation der Dreiphotonensystems in Zustand $|\psi\rangle_A$ ist ja dadurch erfolgt, daß die Photonen 2 und 3 in dem Kristall erzeugt wurden. Dann müssen diese Photonen gleichzeitig zu Alice bzw. Bob gelangen, damit Alice ihre Messung ausführen kann und Bob im Falle einer erfolgreichen Messung sein Photon im teleportierten Zustand besitzt.

Die Lösung des Paradoxons liegt also darin, daß die durch den verschränkten Zustand beschriebene Korrelation zwischen den Photonen 2 und 3, die kein klassisches Analogon besitzt, präpariert wurde und bei einer störungsfreien Propagation derselben zu Alice bzw. Bob für alle Zeiten bestehen bleibt. Es hat also insbesondere keine Informationsübertragung stattgefunden, denn die Korrelation war ja aufgrund der Präparations des Anfangszustands $|\psi_A\rangle$ schon Faktum, bevor Alice ihre Messung ausgeführt hat.

Insbesondere weiß auch Bob nicht, daß Alice mit ihrem Vorhaben, den Zustand $|\psi_1\rangle$ ihres Photons 1 zu teleportieren, Erfolg hatte. Dies muß Alice ihm also erst auf ganz gewöhnliche Art mitteilen. Jedoch ist dieses Faktum gemäß der obigen Analyse für die Auflösung des EPR-Paradoxons gar nicht notwendig.

Das EPR-Paradoxon ergibt sich nur, wenn man übersieht, daß Photon 3 vor der Messung gar keine individuelle objektive Existenz für sich beanspruchen konnte, weil es ja mit Photon 2 verschränkt war. In der Sprache der Quantentheorie sagen wir, daß jede Messung einer Einteilchenobservablen an Photon 3 (die in dem oben benutzen Dreiphotonenraum stets durch einen Operator der Form $\underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} \otimes |\phi\rangle \langle\phi|$, wobei $|\phi\rangle$ ein beliebiger Einphotonenzustand ist) in diesem Falle inkompatibel mit dem präparierten Ausgangszustand $|\psi_A\rangle$ ist.

Im Gegensatz zur klassischen Physik, wo einem Teilchen stets alle observablen Eigenschaften simultan zukommen, besitzt also das Photon 3 keinerlei Einteilcheneigenschaften, bis sie ihm nicht durch eine Messung tatsächlich zugeordnet werden. Dafür bestehen jedoch Korrelationen aufgrund der Verschränktheit mit Photon 2, die klassisch undenkbar sind und deshalb auch klassisch unmögliche Messungen ermöglichen. In unserem Fall ist dies die Messung einer Einteilcheneigenschaft des Photons 3 durch Alice, dies aber nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/4.

Auch die Kopenhagener Deutung der Quantentheorie hat mit der Einführung des "Kollaps der Wellenfunktion" nicht unerheblich zu diesen Mißverständnissen beigetragen, stellt aber, modifiziert um eine quantenstatistische Analyse des Meßprozesses (Stichwort Dekohärenz), die einen Kollaps der Wellenfunktion im Sinne einer "Spooky interaction at a distance" überflüssig macht, immer noch die wohl mit dem in der "Alltagspraxis" erfolgreich angewendeten Formalismus der Quantentheorie am besten kompatible Interpretation des physikalischen Gehalts der Quantentheorie dar.

4 Literatur

D. Boumeester, J-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger, Experimental quantum teleportation, Nature **390** (1997) 575